Übungen zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 06/07 – Blatt 7

Abgabetermin: Dienstag 05.12.2006 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 30 bzw. 56 eine nichttriviale normale Sylowgruppe besitzt.

2. Ein Element x eines Ringes R heißt *nilpotent*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x^n = 0$. Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale eines Ringes R. Beweisen Sie, dass die Restklasse eines jeden Elements von $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ in $R/\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ nilpotent ist.

3. Sei K ein Körper und R ein Integritätsring mit $K \subseteq R$ Zeigen Sie:

   (a) R ist in kanonischer Weise ein K-Vektorraum.

   (b) Ist $\dim_K R < \infty$, so ist R ein Körper

4. Sei R ein Ring mit einem Ideal $\mathfrak{m} \neq R$. Sei weiter jedes Element, das nicht in $\mathfrak{m}$ liegt, eine Einheit. Beweisen Sie, dass $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal ist und zwar sogar das einzige maximale Ideal von R.