Übungen zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 06/07 – Blatt 8

Abgabetermin: Dienstag 12.12.2006 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. Bestimmen Sie ein $r \in \mathbb{Z}$ mit

$$r \equiv 1 \mod 2, \quad r \equiv 2 \mod 9, \quad r \equiv 3 \mod 5, \quad r \equiv 5 \mod 11$$

2. Man führe die in Satz 2.5.5 beschriebene Division mit Rest in folgenden Fällen explizit durch:

   (a) $f = 3X^5 + 2X^4 - X^3 + 3X^2 - 4X + 7, \quad g = X^2 - 2X + 1$

   (b) $f = X^5 + X^4 - 5X^3 + 2X^2 + 2X - 1, \quad g = X^2 - 1$

3. Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der folgenden Polynome aus $\mathbb{Q}[X]$:

$$f \;=\; X^3 + X^2 + X - 3\,, \qquad\qquad g \;=\; X^6 - X^5 + 6X^2 - 13X + 7\,.$$

4. Betrachten Sie den Ring der ganzen *Gaußschen Zahlen* $\mathbb{Z}[\,i\,] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cdot i \subseteq \mathbb{C}$ Zeigen Sie:

   (a) Mit der Funktion $\delta(x) := |x|^2 = x\,\overline{x}$ für $x \in \mathbb{Z}[\,i\,]$ ist $\mathbb{Z}[\,i\,]$ ein euklidischer Ring.
   (Hinweis: Sie können den Beweis geometrisch führen; veranschaulichen Sie sich die ganzen Gaußschen Zahlen als Punkte eines Gitters in der komplexen Ebene.)

   (b) 2 und 5 sind nicht irreduzibel in $\mathbb{Z}[\,i\,]$.

   (c) Ein $x \in \mathbb{Z}[\,i\,]$ ist genau dann eine Einheit von $\mathbb{Z}[\,i\,]$, wenn $\delta(x) = 1$ gilt.

   (d) Bestimmen Sie die Einheiten von $\mathbb{Z}[\,i\,]$.

   (e) 3 ist Primelement in $\mathbb{Z}[\,i\,]$.