Übungen zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 06/07 – Blatt 9

Abgabetermin: Dienstag 19.12.2006 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. Sei K ein Körper und $R := \{ \sum_{i \geq 0}^{<\infty} c_i Y^i \in K[Y] : c_1 = 0 \}$. Zeigen Sie:
   (a) R ist ein Integritätsring.
   (b) Es gibt einen kanonischen Morphismus der Quotientenkörper
   $$\mathrm{Quot}(R) \longrightarrow \mathrm{Quot}(K[Y]) \ .$$
   Dieser ist ein Isomorphismus.
   (c) Y ist Nullstelle eines normierten Polynoms $P \in R[X]$.
2. Es sei R ein Integritätsring. Es seien $a_1, a_2 \in R$ und $d \in ggT(a_1, a_2)$. Also gilt $a_i = d \cdot a_i'$ für $i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass a_1', a_2' teilerfremd sind.
3. Zerlegen Sie die Polynome
   $$f = X^2 + 7X + 12 \,, \qquad \text{und} \qquad g = X^2 + 6X + 5$$
   aus $\mathbb{Z}[X]$ in Primfaktoren und zeigen Sie, dass f und g teilerfremd sind. Lässt sich 1 als Linearkombination $1 = pf + qg$ mit ganzzahligen Polynomen $p, q \in \mathbb{Z}[X]$ darstellen ?
4. Finden Sie den größten gemeinsamen Teiler von $11 + 7i$ und $18 - i$ in $\mathbb{Z}[\,i\,]$.