Übungen zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 06/07 – Blatt 10

Abgabetermin: Dienstag 16.01.2007 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. Es sei $K \subset \mathbb{C}$ ein Körper, der nicht in $\mathbb{R}$ enthalten ist. Zeigen Sie, dass K eine dichte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist.

2. Es sei $\zeta := \exp(2\pi\imath/7) \in \mathbb{C}$ und $\eta := \exp(2\pi\imath/5) \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie: $\eta \notin \mathbb{Q}(\zeta)$.

3. Es sei α bzw. $\beta \in \mathbb{C}$ Nullstelle eines irreduziblen Polynoms $f \in \mathbb{Q}[T]$ bzw. $g \in \mathbb{Q}[T]$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) $f \in \mathbb{Q}(\beta)[T]$ ist irreduzibel.

   (b) $g \in \mathbb{Q}(\alpha)[T]$ ist irreduzibel.

4. Es sei $\alpha \in \mathbb{Q}$ kein Quadrat. Zeigen Sie $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{a}) : \mathbb{Q}] = 4$.

5. Es sei K/k eine Körpererweiterung.

   (a) Ist K/k eine algebraische Körpererweiterung, so ist jeder Unterring R mit $k \subset R \subset K$ ein Körper.

   (b) Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ algebraisch über k , so gilt $k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$.