

Übungen zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik

WS 06/07 – Blatt 11

Abgabetermin: Dienstag 23.01.2007 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

Es sei $\alpha := \sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}$ und $\beta := \iota \cdot \alpha \in \mathbb{C}$.

1. Zeigen Sie

(a) $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}] = 8$

(b) $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ ist der Zerfällungskörper von $T^4 - 2$ über \mathbb{Q} .

2. (a) Für jeden Körpermorphismus $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}$ gilt $\varphi|_{\mathbb{Q}} = \text{id}_{\mathbb{Q}}$.

(b) Es seien α und β wie oben. Zeigen Sie:

Jeder Körpermorphismus $\varphi : \mathbb{Q}(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{C}$ bildet $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ in sich ab.

3. (a) Es gibt einen Körperautomorphismus $\varphi : \mathbb{Q}(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$, der α auf β wirft.

(b) Wohin bildet ein Körperautomorphismus $\varphi : \mathbb{Q}(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ aus (3a) die Zahl ι ab?

4. (a) Zeigen Sie, dass man einen Gruppenmorphismus

$$\rho : \text{Aut}(\mathbb{Q}(\alpha, \beta)/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathfrak{S}(\{\alpha, \iota\alpha, -\iota\alpha, -\alpha\})$$

in die Permutationsgruppe der Nullstellen von $T^4 - 2$ hat und dass dieser injektiv ist.

(b) Ist ρ auch surjektiv?