Probeklausur zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 06/07

Abgabetermin: Dienstag 9.1.2007 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung
Die Abgabe ist freiwillig aber empfehlenswert, weil die Lösung auch korrigiert wird.

---

1. Einige Fragen zu Untergruppen und Normalteilern in einer Gruppe G .
   (a) Wie ist Normalteiler definiert?
   (b) Geben Sie ein Beispiel einer Untergruppe, die nicht Normalteiler ist.
   (c) Es sei G eine Gruppe mit 2007 Elementen.
      i. Besitzt G eine Untergruppe der Ordnung 2 bzw. 9 .
      ii. G besitzt genau eine Untergruppe Z der Ordnung 223 .
      iii. Z ist Normalteiler in G .
      iv. Wie viele Elemente der Ordnung 223 gibt es in G ?
      v. Falls G abelsch ist, ist sie dann auch zyklisch?
      vi. Gibt es einen nicht-trivialen Gruppenmorphismus $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}9 \to \mathrm{Aut}(Z)$?
      vii. Es gibt eine Gruppe mit 2007 Elemente, in der eine Untergruppe mit 9 Elementen nicht Normalteiler ist. Hinweis: Siehe Beispiel 1.5.9 im Skript.
2. Zeigen Sie, dass jede Untergruppe $H \subset G$ mit $[G : H] = 2$ Normalteiler von G ist.
3. Die Gruppe $G := \mathbb{Z}^n$ operiere auf $\mathbb{R}^n$ via Translation
$$G \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \ ; \ (z, x) \longmapsto \tau_z(x) := z + x \ .$$
   Bestimmen Sie ein Repräsentantensystem der Bahnen dieser Operation.
4. Betrachten Sie die Gruppe $\mathbb{Z}$ als Untergruppe von $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:
   (a) Die Restklassengruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist eine Torsionsgruppe.
   (b) Bestimmen Sie die Ordnung der Restklasse $\overline{a/b}$ in Abhängigkeit von a und b .
5. Die Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ operiere auf den Matrizen $M(2\times 2, \mathbb{Z})$ vermöge $S \circ A := S \cdot A$. Bestimmen Sie die Bahnen dieser Gruppenoperation.
6. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung $p \cdot q$ mit p und q prim eine nicht-triviale normale Sylowgruppe besitzt.
7. Einige Fragen zu den Sylowsätzen:
   (a) Nennen Sie die drei Aussagen der Sylowsätze.
   (b) Beschreiben Sie die zentrale Idee des Beweises.
   (c) Erläutern Sie die Aussagen der Sylowsätze am Beispiel $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$.

8. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
   (a) Jedes Element $0 \neq x \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$ ist invertierbar.
   (b) n ist Primzahl.
9. Berechnen Sie für $p = 37$ die Ordnung des Elementes $\overline{9} \in (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p)^{\times}$.
10. Benutzen Sie den euklidischen Algorithmus über $\mathbb{Z}$, um das Inverse von $\overline{9}$ in $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p)^{\times}$ zu berechnen. Bestimmen Sie dessen Ordnung.
11. Bestimmen Sie $r \in \mathbb{Z}$ mit $r \equiv 1 \pmod 8$; $r \equiv 3 \pmod 9$; $r \equiv 4 \pmod{13}$.
12. Es sei $A \in M(n, \mathbb{Z})$ eine ganzzahlige Matrix mit vollem Rang und es sei φ der Homomorphismus $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$; $x \mapsto Ax$. Zeigen Sie:

$$\operatorname{card}(\mathbb{Z}^n / \varphi(\mathbb{Z}^n)) = |\det(A)|$$

13. Zeigen Sie, dass folgende Polynome irreduzibel sind:
    (a) $T^3 - 51 \cdot T^2 + 27 \cdot T + 213$ in $\mathbb{Q}[T]$
    (b) $T^5 + 21 \cdot T^4 + 28 \cdot T^3 - 126 \cdot T^2 + 84 \cdot T - 42$ in $\mathbb{Q}[T]$
    (c) $X^2 + Y^2 - 1$ in $\mathbb{Q}[X, Y]$
14. Seien $f := T^3 + 3T^2 - 2T - 6$ und $g := T^3 - 2T + 4$ Polynome in $\mathbb{Q}[X]$.
    (a) Berechnen Sie $f \cdot f$ in $\mathbb{Q}[X]/(g)$ in Form eines Polynoms vom Grad ≤ 2 .
    (b) Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler d von f und g .
    (c) Bestimmen Sie Koeffizienten $r, s \in \mathbb{Q}[X]$ mit $d = r \cdot f + s \cdot f$.
    (d) Bestimmen Sie das inverse Element von f in $\mathbb{Q}[X]/(g)$.
15. Einige Fragen zum Thema “Konstruktion mit Zirkel und Lineal.
    (a) Kann man mit Zirkel und Lineal aus der Menge $\{0, 1\}$ die Zahl $\sqrt[4]{\sqrt[2]{5} + \sqrt[12]{27}}$ konstruieren.
    (b) Kann man den Winkel von 120° Grad mit Zirkel und Lineal in 3 gleiche Teile teilen.
    (c) Kann man mit Zirkel und Lineal aus der Menge $\{0, 1\}$ das regelmäßige 570 Eck konstruieren?
    (d) Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal aus der Menge $\{0, 1\}$ die Zahl $\exp(2\pi\imath/5)$.