Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra für Informatiker

Institut für Reine Mathematik WS 06/07 – Blatt 1

Abgabetermin: Donnerstag 26.10.2006 um 08:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

Schreiben Sie bitte den Namen Ihres Tutors groß und deutlich auf Ihre Lösungen!

1. Ein 3×3 - Zahlenschema

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

heißt magisches Quadrat, wenn alle Zeilensummen, alle Spaltensummen und alle Diagonalensummen einander gleich sind. Man fasse die Gesamtheit M aller magischen Quadrate als Teilmenge des $\mathbb{R}^9$ auf. Es sei M_c die Teilmenge der $x \in M$ mit Zeilensumme $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) M ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^9$.

(b) M_c ist nur für $c = 0$ ein Untervektorraum von M .

2. Gegeben seien die magischen Quadrate

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

(a) Jedes $x \in M$ hat eine Darstellung

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$$

mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Die Zahlen λ_i sind durch x eindeutig bestimmt.

(b) Man gebe die 1. Zeile eines 3×3 -Schemas vor. Wie kann man diese zu einem magischen Quadrat ergänzen?

(c) Wenn man die 2. Zeile vorgibt, kann man diese auch zu einem magischen Quadrat ergänzen? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Es sei K ein Körper mit dem Nullelement 0_K und Einselement 1_K . Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\overline{n} := \underbrace{1_K + \ldots + 1_K}_{n-mal} \quad .$$

Zeigen Sie: Entweder ist $\overline{n} \neq 0_K$ für alle $n \geq 1$ oder aber es gibt eine kleinste natürliche Zahl $p \geq 1$ mit $\overline{p} = 0$. Insbesondere ist p im letzteren Fall eine Primzahl.

4. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ mit der in der Vorlesung definierten Addition und Multiplikation die Axiome M1, M4, D erfüllt.

Das Griechische Alphabet.

α	A	Alpha	ν	N	Ny
β	B	Beta	ξ	Ξ	xi
γ	Γ	Gamma	o	O	Omikron
δ	Δ	Delta	π	Π	Pi
ϵ, ε	E	Epsilon	ρ	P	Rho
ζ	Z	Zeta	σ	Σ	Sigma
η	H	Eta	τ	T	Tau
θ, ϑ	Θ	Theta	υ	Υ	Ypsilon
ι	I	Iota	ϕ, φ	Φ	Phi
κ	K	Kappa	χ	X	Chi
λ	Λ	Lambda	ψ	Ψ	Psi
μ	M	My	ω	Ω	Omega