Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra für Informatiker

Institut für Reine Mathematik WS 06/07 – Blatt 2

Abgabetermin: Donnerstag 02.11.2006 um 08:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

Schreiben Sie bitte den Namen Ihres Übungsgruppenleiters und die Nummer Ihrer Übungsgruppe groß und deutlich auf Ihre Lösungen!

1. (a) Sind folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.
   i. $W_1 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,,\, x_1^2 = x_2^2 + x_3^2\}$.
   ii. $W_2 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,,\, x_1 \geq 0\}$.
   iii. $W_3 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,,\, x_1 = x_2 = -x_3\}$.

   (b) Untersuchen Sie, ob $\{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,,\, \mathrm{f(x) = f(-x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}\}$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist.

2. Gegeben seien folgende Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$a_1 := (1, 0, 0, -1), \quad a_2 := (0, 1, 0, -1), \quad a_3 := (0, 0, 1, -1), \quad a_4 := (-1, -1, 2, 0).$$

   Zeigen Sie:

   (a) Die Familie (a_1, a_2, a_3, a_4) ist linear abhängig.

   (b) $\langle\{a_1, a_2, a_3, a_4\}\rangle = \langle\{a_1, a_2, a_3\}\rangle$.

3. Gegeben seien im $\mathbb{R}^5$ die Vektoren

$$\begin{aligned} v_1 &= (4, 1, 1, 0, -2), \quad v_2 = (1, 1, 4, -1, 2), \\ v_3 &= (4, 3, 9, -2, 2), \quad v_4 = (1, 1, 1, 1, 1), \quad v_5 = (0, -2, -8, 2, -4). \end{aligned}$$

   Bestimmen Sie eine Basis von $V := \langle v_1, \ldots, v_5\rangle$.

4. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & -6 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 6 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & -4 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 7 & -1 & 0 & 4 & 2 \\ 10 & 15 & 7 & 22 & -5 & 2 & 10 & 13 \\ -20 & -30 & -14 & -44 & 10 & -4 & -20 & -26 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie die Zeilenstufenform von A .

   (b) Geben Sie eine Basis des Zeilenraumes von A an.

   (c) Zeigen Sie, dass der Vektor $x = (1, -1, -2, -1, 1, 0, -1, -4)$ im Zeilenraum von A liegt und bestimmen Sie eine Darstellung von x als Linearkombination in der Basis aus Teil (b).