Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra für Informatiker

Institut für Reine Mathematik WS 06/07 – Blatt 3

Abgabetermin: Donnerstag 09.11.2006 um 08:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

Schreiben Sie bitte den Namen Ihres Übungsgruppenleiters und die Nummer Ihrer Übungsgruppe groß und deutlich auf Ihre Lösungen!

1. Gegeben seien im $\mathbb{R}^4$ die Vektoren

$$v_1 = (1, -1, 2, 0),\ v_2 = (-1, 0, 1, 1),\ v_3 = (-1, -1, 4, 2),\ v_4 = (-3, 1, 0, 2).$$

   (a) Bestimmen Sie eine Basis von $V = \langle v_1, \ldots, v_4 \rangle$ und ergänzen Sie diese zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

   (b) Wählen Sie alle möglichen Basen von V aus den Vektoren $v_1, \ldots, v_4$ aus.

2. Gegeben sei

$$V = \{\, (x_1, \ldots, x_4) \mid x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \,\}$$

   (a) Zeigen Sie, dass V ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ ist.

   (b) Bestimmen Sie eine Basis von V.

   (c) Ergänzen Sie die von Ihnen bestimmte Basis zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

3. Sei V ein K-Vektorraum und seien $v_1, \ldots, v_4 \in V$. Ferner sei das System $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_6) \subset V$ gegeben durch

$$w_i = \sum_{j=1}^{4} \lambda_{i,j} v_j, \quad \lambda_{i,j} \in K, \quad i = 1, \ldots, 6.$$

   Zeigen Sie, dass das System $\underline{w}$ linear abhängig ist.

4. Gegeben seien im $\mathbb{R}^5$ die Vektoren

$$v_1 = (0, 0, 1, -1, 0),\ v_2 = (2, 0, 2, 0, -2)\ v_3 = (-2, 1, 1, -1, 0),$$

$$v_4 = (0, -1, 0, -2, -2),\ v_5 = (0, 2, 4, 0, 0).$$

   (a) Zeigen Sie, dass das System $(v_1, \ldots, v_5)$ linear abhängig ist.

   (b) Geben Sie die Dimension von $\langle v_1, \ldots, v_5 \rangle$ an.

   (c) Bestimmen Sie Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$ mit $\lambda_i \neq 0$ für mindestens ein i, sodass

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_5 v_5 = 0$$

   gilt.