Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra für Informatiker

Institut für Reine Mathematik WS 06/07 – Blatt 4

Abgabetermin: Donnerstag 16.11.2006 um 08:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

Schreiben Sie bitte den Namen Ihres Übungsgruppenleiters und die Nummer Ihrer Übungsgruppe groß und deutlich auf Ihre Lösungen!

1. Sei $A \in M(m \times n, K)$ in Zeilenstufenform gegeben.
   Zeigen Sie, dass $\mathrm{Srg\,(A)} = \mathrm{Zrg\,(A)}$ gilt.

2. Gegeben sei das inhomogene lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 & -10 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -3 & -5 & 1 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 7 & -1 & -6 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie $\dim L(A;0)$ und bestimmen Sie eine Basis von $L(A;0)$.

   (b) Geben Sie eine Lösung von $Ax = b$ an und bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $Ax = b$.

   (c) Geben Sie eine Basis des Spaltenraums von A an, die aus Spalten von A besteht. Stellen Sie jede der übrigen Spalten als Linearkombination der ausgewählten Basis dar.

   (d) Geben Sie einen Vektor $c \in \mathbb{R}^5$ an, sodass $Ax = c$ keine Lösung besitzt.

3. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \text{ und } b = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

   Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A{\cdot}x = b$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

4. Es seien K ein Körper und $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_m = K^n$ eine Kette von Untervektorräumen, und es gelte $V_{i-1} \neq V_i$ für alle $i = 1, \ldots, m$. Zeigen Sie:

   (a) Es gilt stets $m \leq n$.

   (b) Ist $m = n$, so gilt $\dim V_i = i$.

   (c) Gilt $m = n$ und ist $v_i \in V_i \backslash V_{i-1}$ für $i = 1, \ldots, m$, so ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis des K^n .