Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra für Informatiker

Institut für Reine Mathematik WS 06/07 – Blatt 5

Abgabetermin: Donnerstag 23.11.2006 um 08:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

Schreiben Sie bitte den Namen Ihres Übungsgruppenleiters und die Nummer Ihrer Übungsgruppe groß und deutlich auf Ihre Lösungen!

1. (a) Dividieren Sie $X^7 - X^6 - 2X^5 + 4X^4 - 4X^3 + 2X - 3 \in \mathbb{R}[X]$ mit Rest durch $X^3 + X^2 - X + 1$.

   (b) Zeigen Sie, dass ein Polynom $f \in K[X]$ vom Grad $n \geq 1$ höchstens n Nullstellen in K hat.

2. Geben Sie jeweils ein Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ an mit

   (a) $p(-1) = 10$, $p(1) = 4$ und $p(2) = 7$

   (b) $p(-1) = 1$, $p(0) = -2$, $p(1) = -1$ und $p(2) = -2$

3. (a) Ist die Abbildung $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto i\bar{z}$ $\mathbb{C}$-linear?

   (b) Ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definiert durch

   $$f(x_1, x_2) = (-x_1 + 2x_2, -x_1 - x_2, x_1^2)$$

   $\mathbb{R}$ -linear?

   (c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass es $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt mit:

   (i) $\ker f = \{ (x_1, x_2) \mid 0 \leq x_2 \leq 1 \}$

   (ii) $f^{-1}(\{ (x_1, x_2) \mid x_2 = 0 \}) = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 = 0 \}$

4. Gegeben sei der Endomorphismus

   $$f \,:\, \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (2x_1 + 3x_2 - x_3, -x_1 - 2x_2 + x_3, -7x_1 - 12x_2 + 5x_3).$$

   Bestimmen sie eine Basis von $\ker f$, einen direkten Summanden zu $\ker f$ in $\mathbb{R}^3$ und eine Basis von $\operatorname{Bi} f$.