Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra für Informatiker

Institut für Reine Mathematik WS 06/07 – Blatt 8

Abgabetermin: Donnerstag 14.12.2006 um 08:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

Schreiben Sie bitte den Namen Ihres Übungsgruppenleiters und die Nummer Ihrer Übungsgruppe groß und deutlich auf Ihre Lösungen!

1. Bestimmen Sie mittels der Cramerschen Regel die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in GL(4, \mathbb{R}) \text{ und } b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

2. Gegeben sei die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 4 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie σ^{-1}.

   (b) Berechnen Sie σ^{2006}.

3. Es sei f ein Endomorphismus des endlich-dimensionalen K-Vektorraums V. Seien weiter $U, W \neq 0$ f-invariante Untervektorräume von V, d.h. es gelte $f(U) \subset U$ und $f(W) \subset W$. Ferner sei $V = U \oplus W$. Zeigen Sie:

$$\det f = \det f|_U \cdot \det f|_W,$$

   wobei $f|_U$ bzw. $f|_W$ den Endomorphismus von U bzw. W bezeichnet, welcher durch Einschränkung von f auf U bzw. W gegeben ist.

4. Sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $c(A, X)$ und bestimmen Sie dessen Nullstellen.

   (b) Zeigen Sie für $A \in M(n \times n, K)$: Ist $B \in M(n \times n, K)$ so, dass $B = S^{-1}AS$ gilt mit einem $S \in GL(n, K)$, so folgt $c(B, X) = c(A, X)$.