Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra für Informatiker

Institut für Reine Mathematik WS 06/07 – Blatt 12

Abgabetermin: Donnerstag 01.02.2007 um 08:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. Es sei $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-\imath \\ 0 & 4 & 0 \\ 1-\imath & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Finden Sie eine unitäre Matrix $S \in M(3,\mathbb{C})$ und eine reelle Diagonalmatrix $D \in M(3,\mathbb{R})$ mit $\overline{S}^t \cdot A \cdot S = D$.

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

   Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von A besteht, und geben Sie ein $S \in O(3,\mathbb{R})$ an, so dass $S^t A S$ eine Diagonalmatrix ist.

3. Untersuchen Sie, ob die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$$

   positiv definit ist. Wenden Sie dazu das Orthonormierungsverfahren mit der durch A induzierten Bilinearform

$$(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, (v,w) \mapsto v^t A w$$

   auf die Basis $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_4)$ an (vgl. Bemerkung 7.4.2).

4. Es sei $V = P_2(\mathbb{R})$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt \ .$$

   (a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V.

   (b) Es sei $W \subset V$ der Untervektorraum der Polynome vom Grad ≤ 1 und es sei $p_W : V \to W$ die Orthogonalprojektion auf W.
   Bestimmen Sie die Matrix ${}^{\underline{e}}M(p_W)$, wobei $\underline{e} := (1, x, x^2)$ ist.

   (c) Geben Sie eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von p_W an.

   (d) Bestimmen Sie den Abstand $|\, x^2 - p_W(x^2) \,|$ zwischen x^2 und $p_W(x^2)$.
   Zeichen Sie x^2 und $p_W(x^2)$ auf dem Intervall $[0,1]$.