Übungen zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 07/08 – Blatt 01

Abgabetermin: Dienstag 23.10.2007 um 08:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. Sei $f(T) = T^3 + 3T^2 + 2 \in \mathbb{Q}[T]$ gegeben. Finden Sie alle $x \in \mathbb{C}$ mit $f(x) = 0$. Benutzen Sie dazu die Auflösungsformel aus der Einleitung zum Skript.

2. Zeigen Sie, dass die Auflösungsformel für die Gleichung 3 -ten Grades die Auflösbarkeit durch Radikale bedeutet.

3. Es sei $f(T) \in \mathbb{Q}[T]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ und sei $b \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f. Zeigen Sie:

   (a) Die Menge
   $$Q[b] = \left\{ z \in \mathbb{C}\ ;\ z = \sum_{i=0}^{r} a_i b^i,\ a_i \in \mathbb{Q},\ r \in \mathbb{N} \right\}$$
   ist abgeschlossen bezüglich der Operationen ' + ' und ' · '.

   (b) $\mathbb{Q}[b] = \mathbb{Q}b^0 + \cdots + \mathbb{Q}b^{n-1}$

   (c) $\mathbb{Q}[b]$ ist ein Körper.