Übungen zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 07/08 – Blatt 02

Abgabetermin: Dienstag 30.10.2007 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. Eine Menge G , auf der eine zweistellige innere Verknüpfung

$$G \times G \longrightarrow G, \qquad (a,b) \mapsto ab$$

definiert ist, heißt *Gruppi*, falls die Verknüpfung folgende Eigenschaften hat:
(Gi 1) $(ab)c = a(bc)$ für alle $a,b,c \in G$ (Assoziativität).
(Gi 2) Es existiert ein $e \in G$ mit $ea = a$ für alle $a \in G$.
(Gi 3) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $a^* \in G$ mit $aa^* = e$.

   (a) Ist jede Gruppe ein Gruppi?

   (b) Ist jedes Gruppi eine Gruppe?

2. Es sei G eine Gruppe mit Einselement e . Zeigen Sie:

   (a) Sei $i = -1$ oder $i = 2$. Gilt $(ab)^i = a^i b^i$ für alle $a,b \in G$, so ist G kommutativ.

   (b) Ist $a^2 = e$ für alle $a \in G$, so ist G kommutativ.

   (c) Gilt für drei aufeinander folgende Zahlen $i = k, k+1, k+2$ die Gleichung $(ab)^i = a^i b^i$ für alle $a,b \in G$, so ist G kommutativ.

3. Sei K ein Körper. Zeigen Sie:

   (a) Die Menge $M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ a,b,c \in K \right\}$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(3,K)$.

   (b) Im Fall $K = \mathbb{F}_3$ ist $A^3 = E_3$ für alle $A \in M$. Jedoch ist M nicht kommutativ.

4. Es sei G eine Gruppe, $G \neq \{e\}$. Enthält G nur die trivialen Untergruppen, so ist G isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$.