Übungen zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 07/08 – Blatt 03

Abgabetermin: Dienstag 06.11.2007 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$ ist eine zyklische Gruppe.
   (b) $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ ist eine zyklische Gruppe.
   (c) $(\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/51\mathbb{Z})$ ist eine zyklische Gruppe.

2. Berechnen Sie in folgenden Gruppe die
   (a) Anzahl der Elemente von Ordnung 12 in $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^4$
   (b) Anzahl der Elemente von Ordnung 36 in $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/36\mathbb{Z})^4$
   (c) Anzahl der Elemente von Ordnung 12 in $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/36\mathbb{Z})^4$

3. Es seien $d, m, n \in \mathbb{N}$ mit $n = m \cdot d$, $m \geq 2$ und $d \geq 2$. Weiterhin seien $a, b \in \mathbb{N}$ positiv. Berechnen Sie in folgenden Gruppe die
   (a) Anzahl der Elemente von Ordnung n in $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^b$
   (b) Anzahl der Elemente von Ordnung m in $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^a \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^b$

4. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ positiv. Zeigen Sie dass die Abbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\ ;\ x \longmapsto \overline{xm}$$

   ein Morphismus von Gruppen ist und bestimmen Sie den Kern der Abbildung. Betrachten Sie zunächst das Beispiel $m = 21$ und $n = 51$.