Übungen zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 07/08 – Blatt 04

Abgabetermin: Dienstag 13.11.2007 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. Welche der folgenden Gruppen sind isomorph zueinander
   $\mathfrak{S}_3$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
   Begründen Sie Ihre Aussage.

2. Berechnen Sie die Anzahl der Elemente von Ordnung 3 , 4 , 5 und 12 in
   $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5 \times (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/60\mathbb{Z})^2$.

3. Bringen Sie die Matrix $M := \begin{pmatrix} -4 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 2 \\ 7 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ mittels Zeilen- und Spaltenumformungen auf Elementarteilergestalt, d.h. auf Diagonalgestalt, so dass sich die Diagonalelemente m_1, m_2, m_3 sukzessiv teilen; also $m_1 | m_2$ und $m_2 | m_3$.

4. Es sei $\phi : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ ein Endomorphismus des n-fachen Produkts der additiven Gruppe $\mathbb{Z}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist. Zeigen Sie:

   (a) ϕ ist genau dann injektiv, wenn $\mathbb{Z}^n / \operatorname{Im}(\phi)$ eine endliche Gruppe ist.

   (b) Ist ϕ injektiv, so gilt $\operatorname{card}(\mathbb{Z}^n / \operatorname{Im}(\phi)) = |\det(\phi)|$.

   Hinweis: Betrachten Sie den von ϕ induzierten Homomorphismus der $\mathbb{Q}$-Vektorräume $\phi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}^n \longrightarrow \mathbb{Q}^n$.