Übungen zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 07/08 – Blatt 05

Abgabetermin: Dienstag 20.11.2007 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. Es sei k ein Körper mit $q = p^\alpha$ Elementen, wobei p eine Primzahl ist. Es sei

$$G := \left\{ A \in \mathrm{GL}(n,k) \; ; \; A = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   Zeigen Sie, dass G eine p-Gruppe ist und geben Sie eine konkrete Filtrierung

$$\{E_n\} := S_0 \lhd S_1 \lhd \ldots \lhd S_n = G$$

   an, wobei $S_{i-1} \lhd S_i$ Normalteiler und S_i/S_{i-1} kommutativ für $i = 1, \ldots, n$ ist.

2. Es sei G eine endliche Gruppe und $H < G$ eine p-Untergruppe für eine Primzahl p. Man zeige: Ist H ein Normalteiler von G, so ist H in jeder p-Sylowgruppe von G enthalten.

3. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 30 bzw. 56 eine nichttriviale normale Sylowgruppe besitzt.

4. Es sei G eine Gruppe und X die Menge der Untergruppen von G. Man zeige:

   (a) $G \times X \longrightarrow X$, $(g,H) \longmapsto gHg^{-1}$, definiert eine Wirkung von G auf X.

   (b) Der Orbit eines Elementes H von X besteht genau dann nur aus H, wenn H ein Normalteiler von G ist.

   (c) Ist die Ordnung von G Potenz einer Primzahl p, so unterscheidet sich die Anzahl der Untergruppen in G von der Anzahl der Normalteiler in G um ein Vielfaches von p.