Übungen zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 07/08 – Blatt 06

Abgabetermin: Dienstag 27.11.2007 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. (Chinesischer Restsatz) Bestimmen Sie ein $r \in \mathbb{Z}$ mit

$$r \equiv 1 \mod 2, \quad r \equiv 2 \mod 9, \quad r \equiv 3 \mod 5, \quad r \equiv 5 \mod 11 \ .$$

2. Man beschreibe die Gruppe der Einheiten für jeden der folgenden Ringe:
(a) $\mathbb{Z}/12 \cdot \mathbb{Z}$ (b) $\mathbb{Z}/17 \cdot \mathbb{Z}$ (c) $\mathbb{Z}/8 \cdot \mathbb{Z}$ (d) $\mathbb{Z}/n \cdot \mathbb{Z}$

3. Es sei $\mathbb{Z}[\imath] := \{a + b\imath \in \mathbb{C} \ ; \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ der Ring der Gaußschen Zahlen.
Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\imath]/(1 + 3\imath)$ isomorph zu $\mathbb{Z}/10 \cdot \mathbb{Z}$ ist.

4. Sei K ein Körper und R ein Integritätsring mit $K \subseteq R$ Zeigen Sie:

   (a) R ist in kanonischer Weise ein K -Vektorraum.

   (b) Ist $\dim_K R < \infty$, so ist R ein Körper.