Übungen zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 07/08 – Blatt 08

Abgabetermin: Dienstag 11.12.2007 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der folgenden Polynome aus $\mathbb{Q}[X]$ und stellen ihn als Linearkombination dieser Polynome dar:

$$f = X^3 + X^2 + X - 3\,, \qquad g = X^6 - X^5 + 6X^2 - 13X + 7\,.$$

2. Betrachten Sie den Ring der ganzen *Gaußschen Zahlen* $\mathbb{Z}[\imath] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cdot \imath \subseteq \mathbb{C}$.
   Zeigen Sie:
   (a) Mit der Funktion $\delta(x) := |x|^2 = x\,\overline{x}$ für $x \in \mathbb{Z}[\imath]$ ist $\mathbb{Z}[\imath]$ ein euklidischer Ring.
   (Hinweis: Sie können den Beweis geometrisch führen; veranschaulichen Sie sich die ganzen Gaußschen Zahlen als Punkte eines Gitters in der komplexen Ebene.)
   (b) 2 und 5 sind nicht irreduzibel in $\mathbb{Z}[\imath]$.
   (c) Ein $x \in \mathbb{Z}[\imath]$ ist genau dann eine Einheit von $\mathbb{Z}[\imath]$, wenn $\delta(x) = 1$ gilt.
   (d) Bestimmen Sie die Einheiten von $\mathbb{Z}[\imath]$.
   (e) 3 ist Primelement in $\mathbb{Z}[\imath]$.

3. Finden Sie den größten gemeinsamen Teiler von $11 + 7\imath$ und $18 - \imath$ in $\mathbb{Z}[\imath]$.

4. Der Unterkörper $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}] \subset \mathbb{C}$ hat als $\mathbb{Q}$-Vektorraum die Basis $\underline{e} := (1, \sqrt{-5})$. Bezeichne $\mu_{a+b\sqrt{-5}} : \mathbb{Q}[\sqrt{-5}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ die Multiplikation mit $a+b\sqrt{-5}$ auf $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$.
   (a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung $\mu_{a+b\sqrt{-5}}$ bezüglich der Basis $\underline{e}$.
   (b) Berechnen Sie die Determinate von $\mu_{a+b\sqrt{-5}}$.
   (c) Zeigen Sie, dass dass 3 und $2 \pm \sqrt{-5}$ irreduzible Elemente in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sind.
   (d) Zeigen sie, dass $9 = 3 \cdot 3 = (2 + \sqrt{-5}) \cdot (2 - \sqrt{-5})$ Zerlegungen in irreduzible Elemente sind.
   (e) Zeigen Sie , dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nicht faktoriell ist.