Übungen zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 07/08 – Blatt 09

Abgabetermin: Dienstag 18.12.2007 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. Untersuchen Sie, ob die folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel sind:

   (a) $X^2 - 2345X + 125$,

   (b) $X^3 - 51X^2 + 27X + 213$,

   (c) $X^5 + 21X^4 + 28X^3 - 126X^2 + 84X - 42$,

   (d) $X^3 + 2X^2 + 3X + 1$.

2. Zerlegen Sie die Polynome

$$f \;=\; X^2 + 7X + 12 \qquad \text{und} \qquad g \;=\; X^2 + 6X + 5$$

   aus $\mathbb{Z}[X]$ in Primfaktoren und zeigen Sie, dass f und g teilerfremd sind. Lässt sich 1 als Linearkombination $1 = pf + qg$ mit ganzzahligen Polynomen $p, q \in \mathbb{Z}[X]$ darstellen ?

3. Es sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$. Auf dem Polynomring $\mathbb{F}_p[T]$ ist die Abbildung $\phi : \mathbb{F}_p[T] \longrightarrow \mathbb{F}_p[T]$; $T \longmapsto T + 1$ ein Isomorphismus.
   Es sei $F := T^p - T - 1 \in \mathbb{F}_p[T]$. Zeigen Sie:

   (a) ϕ erzeugt eine Gruppe $G \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_p[T])$ mit p Elementen.

   (b) ϕ lässt das Polynom F invariant.

   (c) ϕ überführt eine Primfaktorzerlegung von F in sich.

   (d) Das Polynom $F := T^p - T - 1$ ist irreduzibel.
   Hinweis: Betrachten Sie die Wirkung von G auf den Primfaktoren von F . Dann studieren Sie den Stabilisator eines irreduziblen Faktors von F in G . Die Vorüberlegung reduziert das Problem darauf, dass F keine Nullstelle in $\mathbb{F}_p$ hat. Letzteres folgt unmittelbar aus Korollar 1.7.5.