Übungen zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 07/08 – Blatt 11

Abgabetermin: Dienstag 22.01.2008 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. Es sei L/K eine endliche Körpererweiterung vom Grad $[L:K] = 2^k$ und es sei $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad 3, welches in L eine Nullstelle hat. Zeigen Sie, dass f bereits eine Nullstelle in K hat.

2. Es sei K ein Körper und x ein Element eines Erweiterungskörpers von K, so dass x transzendent über K ist. Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ ist x^n transzendent über K, und es gilt $[K(x) : K(x^n)] = n$.

3. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\alpha = \sqrt{5}+\sqrt{3}$ über den folgenden Körpern:

   (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ (b) $\mathbb{Q}$ (c) $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$ (d) $\mathbb{Q}(\sqrt{15})$

4. Betrachten Sie $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ als Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

   (a) L ist Zerfällungskörper des Polynoms $X^4 - 2$ über $\mathbb{Q}$.

   (b) $[L : \mathbb{Q}] = 8$

   (c) Man bestimme alle $\mathbb{Q}$-Automorphismen von L.

   (d) Berechnen Sie das Bild von $\sqrt[4]{2} + i$ unter den $\mathbb{Q}$-Automorphismen von L.

   (e) Zeigen Sie: $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2} + i)$.