Übungen zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 07/08 – Blatt 12

Abgabetermin: Dienstag 29.01.2008 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. Es sei $\zeta := \exp(2\pi\imath/5) \in \mathbb{C}$ und $\alpha := \sqrt[5]{2} \in \mathbb{R}$.
   (a) Bestimmen Sie $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.
   (b) Bestimmen Sie $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$.
   (c) Bestimmen Sie $[\mathbb{Q}(\zeta, \alpha) : \mathbb{Q}]$.
   (d) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\zeta + \alpha)$ der Zerfällungskörper von $T^5 - 2$ über $\mathbb{Q}[\zeta]$ ist.
   (e) Bestimmen Sie alle Automorphismen von $\mathbb{Q}(\zeta, \alpha)$ und deren Wirkung auf $\zeta + \alpha$.
   (f) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\zeta + \alpha)$ der Zerfällungskörper von $T^5 - 2$ über $\mathbb{Q}$ ist.
2. Es sei K/k der Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in k[X]$ vom Grad n .
   Zeigen Sie: Ist $[K : k] = n!$, so ist f irreduzibel.
3. Es sei K/k eine Körpererweiterung. Es seien $f, g \in k[X]$ normierte, irreduzible Polynome. Beweisen Sie:
   Haben f und g in K eine gemeinsame Nullstelle, so sind sie gleich.