Übungen zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 07/08 – Blatt 13

Abgabetermin: Dienstag 05.02.2008 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. Es sei K/k eine endliche galoissche Körpererweiterung mit Gruppe G. Man betrachte die natürliche Aktion von G auf K und interpretiere für $a \in K$ die Stabilitätsuntergruppe G_a sowie die Bahn $G \circ a$ im Sinne der Galoistheorie. Weiter bestimme man die Ordnung von G_a und $G \circ a$.

2. Es sei K/k eine endliche galoissche Körpererweiterung. Weiter seien L_1, L_2 Zwischenkörper, die zu den Untergruppen H_1, H_2 von $G(K/k)$ korrespondieren.
   Beweisen Sie:
   Für $\sigma \in G(K/k)$ ist $\sigma(L_1) = L_2$ äquivalent zu $\sigma H_1 \sigma^{-1} = H_2$.

3. Es sei K der Zerfällungskörper eines Polynoms des Typs $X^n - a$ über einem Körper k der Charakteristik 0. Ist die Erweiterung K/k stets zyklisch? Man diskutiere insbesondere den Fall $k = \mathbb{Q}$.

4. Für paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$. Zeigen Sie, dass $K/\mathbb{Q}$ galoissch ist und dass die Galoisgruppe isomorph zu $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2)^n$ ist. Dazu müssen Sie die Wirkung der Galoisgruppe auf den Wurzeln $\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}$ beschreiben. Für die Bestimmung der Galoisgruppe behandeln Sie zuerst den Fall $n = 1$. Für den Induktionsschritt zeigen Sie zuerst $\sqrt{p_n} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_{n-1}})$.