Übungen zur Vorlesung Angewandte Diskrete Mathematik

Institut für Reine Mathematik WS 08/09 – Blatt 11

Abgabetermin: Freitag, 23.01.2009 um 14:15 Uhr vor Beginn der Übung

---

1. Sei $\mathbb{F}_{16} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]/(X^4 + X + 1)$, und sei $\alpha := \overline{X}$.

   (a) Für $i = 1, \ldots, 14$ ist der *Zech-Logarithmus* von i diejenige Zahl l , so dass (4 P)

   $$1 + \alpha^i = \alpha^l$$

   gilt. Berechnen Sie alle Zech-Logarithmen.

   (b) Benutzen Sie die Zech-Logarithmen, um die Summe (2 P)

   $$\alpha^9 + \alpha^{10} + \alpha^{11} + \alpha^{12} + \alpha^{15}$$

   als Potenz von α zu schreiben.

   (c) $\mathbb{F}_{16}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit Basis $\underline{e} = \{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$. (Das brauchen Sie nicht zu zeigen). Betrachten Sie die lineare Abbildung (2 P)

   $$l_\alpha : \mathbb{F}_{16} \to \mathbb{F}_{16}, \quad x \mapsto \alpha \cdot x.$$

   Bestimmen Sie die darstellende Matrix von l_α bezüglich der Basis $\underline{e}$.

   (d) Berechnen Sie das charakteristische Polynom der Matrix aus (c). Was fällt auf? (4 P)

   (e) Zeigen Sie: Das Polynom $T^2 + T + 1$ hat zwei Nullstellen β_1, β_2 in $\mathbb{F}_{16}$. Bestimmen Sie diese. (2 P)

   (f) Sei $\mathbb{F}_4 := \{0, 1, \beta_1, \beta_2\} \subset \mathbb{F}_{16}$. Zeigen Sie: $\mathbb{F}_4$ ist ein Körper. (2 P)
   Hinweis: Zeigen Sie: Summe und Produkt zweier beliebiger Elemente von $\mathbb{F}_4$ liegt wieder in $\mathbb{F}_4$.

   (g) Zeigen Sie: $\mathbb{F}_{16}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{F}_4$ mit Basis $\{1, \alpha\}$. (2 P)
   Hinweis: Zeigen Sie: Jedes Element $x \in \mathbb{F}_{16}$ hat eine eindeutige Darstellung $x = c \cdot 1 + d \cdot \alpha$, mit $c, d \in \mathbb{F}_4$.

   (h) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über $\mathbb{F}_4$. (2 P)