Analysis III *

Martin Brokate †

Inhaltsverzeichnis

---

*Vorlesungsskript, WS 2000/01

†Zentrum Mathematik, TU München

1 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir beginnen mit einem Beispiel, nämlich mit dem gedämpften harmonischen Oszillator. Er wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$my'' + dy' + ky = 0\,. \tag{1.1}$$

Hierbei sind $m, d, k > 0$ Konstante. Als Lösung gesucht ist eine reellwertige Funktion y, welche auf einem Intervall I definiert, dort zweimal differenzierbar ist und für jedes $t \in I$ die Gleichung

$$my''(t) + dy'(t) + ky(t) = 0 \tag{1.2}$$

erfüllt. Wir berechnen Lösungen, zunächst ohne uns um DSBs (Definitionen, Sätze, Beweise) zu kümmern. Wir dividieren (1.1) durch m und setzen

$$b = \frac{d}{2m}\,, \quad c = \frac{k}{m}\,,$$

dann wird (1.1) zu

$$y'' + 2by' + cy = 0\,. \tag{1.3}$$

Die noch einfachere Differentialgleichung

$$y' = \lambda y\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

hat die Lösung

$$y(t) = e^{\lambda t}\,. \tag{1.5}$$

Wir fragen uns, ob (1.5) auch eine Lösung von (1.3) ist. Dazu setzen wir (1.5) in (1.3) ein und erhalten

$$(\lambda^2 + 2b\lambda + c)e^{\lambda t} = 0\,. \tag{1.6}$$

Diese Gleichung ist (unabhängig davon, welchen Wert t hat) genau dann erfüllt, wenn λ eine Lösung der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0 \tag{1.7}$$

ist. Gleichung (1.7) hat die beiden Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - c}\,. \tag{1.8}$$

Fall 1, $\mathbf{b^2 > c}$. Beide Lösungen von (1.7) sind reell, und

$$y(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} \tag{1.9}$$

mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ beliebig, ist Lösung von (1.3), andere gibt es nicht.

Fall 2, $\mathbf{b^2 = c}$. Es ist $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda = -b$. Neben $y(t) = e^{\lambda t}$ ist auch

$$y(t) = te^{\lambda t}$$

eine Lösung von (1.3), und damit auch

$$y(t) = (a_1 + a_2 t)e^{\lambda t} \tag{1.10}$$

für beliebige $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Fall 3, $\mathbf{b^2 < c}$. Die beiden Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -b \pm i\omega\,, \quad \omega = \sqrt{c - b^2}\,, \quad i = \sqrt{-1}\,,$$

sind konjugiert komplex, die zugehörigen komplexen Lösungen von (1.3) sind

$$y(t) = e^{-bt \pm i\omega t} = e^{-bt} e^{\pm i\omega t} = e^{-bt}(\cos\omega t \pm i \sin\omega t)\,,$$

und die entsprechenden reellen Lösungen sind

$$y(t) = e^{-bt}(a_1 \cos\omega t + a_2 \sin\omega t)\,, \tag{1.11}$$

mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ beliebig.

Umschreiben in ein System erster Ordnung. Aus der Differentialgleichung (1.3), welche die zweite Ableitung der unbekannten Funktion enthält, erhalten wir zwei Differentialgleichungen 'erster Ordnung', d.h. solche, welche nur erste Ableitungen enthalten, indem wir unbekannte Funktionen y_1 (entspricht y) und y_2 (entspricht y') betrachten. Aus (1.3) wird dann das 'System erster Ordnung'

$$y_1' = y_2\,, \tag{1.12}$$

$$y_2' = -cy_1 - 2by_2\,, \tag{1.13}$$

oder in Matrix-Vektor-Schreibweise

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Ein allgemeines System erster Ordnung (gewöhnlicher Differentialgleichungen) im Reellen ist gegeben durch

$$y' = f(t, y)\,, \quad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,. \tag{1.15}$$

Im Beispiel oben ist $n = 2$,

$$f(t, y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -cy_1 - 2by_2 \end{pmatrix}.$$

Das Beispiel des harmonischen Oszillators zeigt, dass es sinnvoll ist, komplexe Lösungen zu betrachten, auch wenn man im Endeffekt nur an reellen Lösungen interessiert ist.

Definition 1.1 (Komplexwertige Ableitung)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall. Eine Funktion $y : I \to \mathbb{C}^n$ heißt differenzierbar in $t \in I$, falls

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \tag{1.16}$$

existiert. In diesem Fall heißt

$$y'(t) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \tag{1.17}$$

die Ableitung von y in t. □

Eine Funktion $y : I \to \mathbb{C}$ können wir auch als Funktion $y : I \to \mathbb{R}^2$ auffassen. Definition 1.1 stimmt dann mit der Definition der Ableitung einer Kurve (siehe Analysis 2) überein. Die Ableitung $y'(t)$ existiert also genau dann, wenn die Ableitungen $(\mathrm{Re}\, y)'(t)$ und $(\mathrm{Im}\, y)'(t)$ von Real- und Imaginärteil existieren, und es gilt in diesem Fall

$$y'(t) = (\mathrm{Re}\, y)'(t) + i(\mathrm{Im}\, y)'(t)\,.$$

Wir schreiben wieder $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 1.2 (Lösung eines Systems erster Ordnung)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$. Eine Funktion $y : I \to \mathbb{K}^n$ heißt Lösung des Systems

$$y' = f(t, y)\,, \tag{1.18}$$

in I, falls y in I differenzierbar ist und

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{1.19}$$

gilt für alle $t \in I$. □

Wir betrachten im Folgenden Systeme der Form

$$y' = Ay\,, \quad A \in \mathbb{K}^{(n,n)}\,, \tag{1.20}$$

welche als lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten (die 'Koeffizientenmatrix' A ist konstant, d.h. weder von t noch von y abhängig) bezeichnet werden. Es wird sich herausstellen, dass Lösungen von (1.20) die Form

$$y(t) = \exp(tA)y_0 \tag{1.21}$$

haben, wobei $y_0 \in \mathbb{K}^n$ ein fester Vektor und exp die sogenannte Matrixexponentialfunktion ist. Letztere soll definiert werden durch

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\,. \tag{1.22}$$

Wir werden die folgenden Fragen klären:

- Wie ist die Reihe (1.22) definiert ?
- Ist (1.21) Lösung von (1.20) ?
- Wie sehen diese Lösungen im Einzelnen aus ?

Definition 1.3 (Reihe im normierten Raum)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, sei $(x_k)_{k\geq 0}$ Folge in X. Falls die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \tag{1.23}$$

gegen ein $s \in X$ konvergiert, so sagen wir, dass die zugehörige Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ konvergiert, und definieren

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = s\,. \tag{1.24}$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ heißt absolut konvergent, falls

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| < \infty\,. \tag{1.25}$$

□

Aus der Stetigkeit der Addition und Skalarmultiplikation im normierten Raum folgen die Rechenregeln

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x_k + y_k) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k + \sum_{k=0}^{\infty} y_k\,, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda x_k = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} x_k\,, \tag{1.26}$$

$\lambda \in \mathbb{K}$, die jeweils gültig sind, wenn die Grenzwerte auf der rechten Seite existieren.

Satz 1.4 *Sei $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum. Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ absolut konvergent, so ist sie auch konvergent, und es gilt*

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} x_k \right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|\,. \tag{1.27}$$

Beweis: Sei

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \|x_k\|\,,$$

dann gilt für die in (1.23) definierten Partialsummen für $n > m$

$$\|s_n - s_m\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| = |\sigma_n - \sigma_m|\,.$$

Da (σ_n) Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist, ist (s_n) Cauchyfolge in X, also konvergent. Wegen $\|s_n\| \le |\sigma_n|$ folgt (1.27) aus

$$\|s\| = \lim_{n\to\infty} \|s_n\| \le \lim_{n\to\infty} |\sigma_n| = \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|\,,$$

wobei die Stetigkeit der Norm verwendet wurde. □

Definition 1.5 (Operatornorm)
Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^n$. Für $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ definieren wir

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^n \\ \|x\|=1}} \|Ax\|\,. \tag{1.28}$$

□

Lemma 1.6 *Durch (1.28) wird eine Norm auf* $\mathbb{K}^{(n,n)}$ *definiert. Sie heißt die (zur ursprünglichen Norm auf* $\mathbb{K}^n$ *zugehörige) Operatornorm oder Matrixnorm.*

Beweis: Übung. $\square$

Lemma 1.7 *Sei* $(\|\cdot\|)$ *Norm auf* $\mathbb{K}^n$*. Für die zugehörige Operatornorm gilt*

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|\,, \tag{1.29}$$

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|\,, \tag{1.30}$$

für alle $A, B \in \mathbb{K}^{(n,n)}$, $x \in \mathbb{K}^n$*.*

Beweis: Für $x \neq 0$ gilt

$$\|Ax\| = \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \|x\| \leq \|A\|\|x\|\,,$$

$$\|ABx\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\|\,,$$

also

$$\sup_{\|x\|=1} \|ABx\| \leq \|A\|\|B\|\,.$$

$\square$

Satz 1.8 *Für jedes* $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ *wird durch*

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{1.31}$$

eine Matrix $\exp(A) \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ *definiert, und es gilt*

$$\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)\,. \tag{1.32}$$

Wir schreiben auch

$$e^A$$

für $\exp(A)$.

Beweis: Folgt aus Satz 1.4, da

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = \exp(\|A\|)\,.$$

$\square$

Wir sehen unmittelbar, dass

$$e^0 = I\,.$$

Folgerung 1.9 *Ist $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{(n,n)}$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$, so gilt*

$$e^D = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}) . \tag{1.33}$$

Ist A nilpotent, das heißt $A^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist

$$e^A = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k}{k!} . \tag{1.34}$$

Beweis: Folgt direkt aus (1.31), da

$$D^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k) .$$

□

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad A^2 = 0 , \quad e^A = I + A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Satz 1.10 *Seien $A, B \in \mathbb{K}^{(n,n)}$, es gelte $AB = BA$. Dann gilt*

$$e^{A+B} = e^A e^B . \tag{1.35}$$

Insbesondere ist e^A invertierbar für alle $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$, und

$$\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A} . \tag{1.36}$$

Beweis: Es genügt, die erste Gleichung in (1.35) zu zeigen. Wir setzen

$$R_m = \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{A^j}{j!} \right) \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{B^k}{k!} \right) . \tag{1.37}$$

Da die Matrizenmultiplikation stetig ist, gilt

$$\lim_{m\to\infty} R_m = e^A e^B .$$

Wir setzen

$$S_m = \sum_{l=0}^{m} \frac{(A+B)^l}{l!} , \qquad \text{also} \quad \lim_{m\to\infty} S_m = e^{A+B} . \tag{1.38}$$

Es genügt daher zu zeigen, dass

$$\lim_{m\to\infty} (R_m - S_m) = 0 . \tag{1.39}$$

Wegen $AB = BA$ gilt (binomische Formel)

$$S_m = \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} A^{l-k} B^k = \sum_{l=0}^{m} \sum_{\substack{0\le j,k\le m \\ j+k=l}} \frac{1}{j!k!} A^j B^k , \tag{1.40}$$

also

$$R_m - S_m = \sum_{\substack{0\le j,k\le m\\ j+k>m}} \frac{1}{j!k!} A^j B^k\,. \tag{1.41}$$

Es folgt

$$\|R_m - S_m\| \le \sum_{\substack{0\le j,k\le m\\ j+k>m}} \frac{1}{j!k!}\|A\|^j\|B\|^k \le \sum_{l=m+1}^{2m} \sum_{\substack{j,k\ge 0\\ j+k=l}} \frac{1}{j!k!}\|A\|^j\|B\|^k \tag{1.42}$$

$$= \sum_{l=m+1}^{2m} \frac{(\|A\|+\|B\|)^l}{l!} \le \sum_{l=m+1}^{\infty} \frac{(\|A\|+\|B\|)^l}{l!} \tag{1.43}$$

$$\to 0 \tag{1.44}$$

für $m \to \infty$, da die letzte Summe in der Ungleichungskette gerade das Restglied der (konvergenten) Exponentialreihe in $\mathbb{R}$ darstellt. □

Satz 1.11 *Sei $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$. Dann ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^{(n,n)}$,*

$$f(t) = e^{tA}\,, \tag{1.45}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und

$$f'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A\,. \tag{1.46}$$

Beweis: Sei zunächst $t = 0$. Für $h \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|e^{hA} - I - hA\| = \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!} \right\| \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|h|^k \|A\|^k}{k!}\,.$$

Mit

$$g(h) = e^{h\|A\|}$$

ist

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{|h|^k\|A\|^k}{k!} = g(|h|) - g(0) - |h|g'(0)\,,$$

also folgt

$$\|e^{hA} - e^0 - hA\| \le g(|h|) - g(0) - |h|g'(0) \le \frac{h^2}{2} \max_{0\le\xi\le|h|} |g''(\xi)| = \frac{h^2}{2} g''(|h|) \tag{1.47}$$

$$= \frac{h^2}{2}\|A\|^2 e^{\|hA\|} \tag{1.48}$$

und damit

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\ne 0}} \frac{1}{h}\|e^{hA} - e^0 - hA\| = 0\,,$$

also

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\ne 0}} \frac{1}{h}(e^{hA} - e^0) = A\,,$$

und damit die Behauptung für $t = 0$. Für beliebiges t folgt die Behauptung wegen

$$e^{(t+h)A} = e^{hA}e^{tA}$$

aus

$$\frac{1}{h}(e^{(t+h)A} - e^{tA}) - Ae^{tA} = \left[\frac{1}{h}(e^{hA} - e^{0}) - A\right] e^{tA} \to 0$$

für $h \to 0$. Außerdem gilt

$$A\sum_{k=0}^{m} \frac{t^k A^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{t^k A^k}{k!}\right) A\,.$$

Hieraus folgt mit Grenzübergang $m \to \infty$ die zweite Gleichung in (1.46), da die Matrizenmultiplikation stetig ist. □

Wir betrachten nun die sogenannte **Anfangswertaufgabe**

$$y' = Ay\,, \quad y(0) = y_0\,, \tag{1.49}$$

wobei $y_0 \in \mathbb{K}^n$ ein gegebener Vektor (der sogenannte Anfangswert) ist.

Satz 1.12 (Eindeutige Lösbarkeit der Anfangswertaufgabe)
Seien $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$, $y_0 \in \mathbb{K}^n$. Dann ist die durch

$$y(t) = e^{tA}y_0 \tag{1.50}$$

definierte Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe (1.49).

Beweis: Aus Satz 1.11 folgt

$$y'(t) = Ae^{tA}y_0 = Ay(t)\,, \quad y(0) = e^0 y_0 = y_0\,.$$

Sei $\tilde{y}$ eine weitere Lösung der Anfangswertaufgabe. Für $z = y - \tilde{y}$ gilt dann

$$z'(t) = y'(t) - \tilde{y}'(t) = Ay(t) - A\tilde{y}'(t) = Az(t)\,, \quad z(0) = 0\,.$$

Wir definieren

$$w(t) = e^{-tA}z(t)\,.$$

Dann ist

$$w'(t) = \left[e^{-tA}(-A)\right] z(t) + e^{-tA}[Az(t)] = 0\,, \quad w(0) = 0\,.$$

Hieraus folgt $w(t) = 0$ für alle t (Hauptsatz, komponentenweise angewendet), also

$$0 = e^{tA}w(t) = e^{tA}e^{-tA}z(t) = z(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, und damit $y = \tilde{y}$. □

Betrachten wir die Anfangswertaufgabe

$$y' = Ay\,, \quad y(t_0) = y_0\,, \tag{1.51}$$

so ist deren eindeutige Lösung gegeben durch

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 \,, \tag{1.52}$$

wie wir erkennen, wenn wir Satz 1.12 auf $z(t) = y(t + t_0)$ anwenden.

Als Beispiel betrachten wir das System

$$y_1' = y_1 + 2y_2 \,, \qquad y_1(0) = 2 \,, \tag{1.53}$$
$$y_2' = y_2 \,, \qquad y_2(0) = 3 \,. \tag{1.54}$$

Es ist $n = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I + N \,, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Es ist $IN = NI = N$, $N^2 = 0$, also

$$e^{tA} = e^{tI+tN} = e^{tI} e^{tN} = e^{tI}(I + tN) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.55}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} , \tag{1.56}$$

also

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+6t)e^t \\ 3e^t \end{pmatrix} . \tag{1.57}$$

Nach Satz 1.12 ist die Menge aller Lösungen des linearen Systems $y' = Ay$ gegeben durch

$$L = \{ y |\, y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n \,,\, y(t) = e^{tA} y_0 \,,\, y_0 \in \mathbb{K}^n \} \,. \tag{1.58}$$

Satz 1.13 (Lösungsraum des linearen Systems)
Sei $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$. Die Menge L der Lösungen des linearen Systems $y' = Ay$ ist ein Vektorraum der Dimension n über $\mathbb{K}$. Die Spalten der Matrix e^{tA} bilden eine Basis von L.

Beweis: Wir definieren eine Abbildung $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathrm{Abb}\,(\mathbb{R}; \mathbb{K}^n)$ durch

$$(\Phi\eta)(t) = e^{tA}\eta \,.$$

Offensichtlich ist Φ linear, und es gilt für Bild und Kern

$$\mathrm{im}\,(\Phi) = L \,, \quad \ker(\Phi) = \{0\} \,,$$

also $\dim(L) = \dim(\mathbb{K}^n) = n$. Die Spalten von e^{tA} sind gerade die Bilder $\Phi(e_i)$ der Einheitsvektoren $e_i \in \mathbb{K}^n$. □

Wir behandeln nun die Frage, wie e^{tA} für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ aussieht. Wir führen den allgemeinen Fall durch Zerlegung und Basiswechsel auf die beiden schon behandelten Fälle (diagonal, nilpotent) zurück.

Lemma 1.14 *Seien $A, T \in \mathbb{K}^{(n,n)}$, sei T invertierbar. Dann gilt*

$$e^{T^{-1}AT} = T^{-1} e^A T \,. \tag{1.59}$$

Beweis: Es ist
$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(T^{-1}AT)^k}{k!} = T^{-1} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!} \right) T \,.$$
Grenzübergang $m \to \infty$ liefert die Behauptung. □

In der Linearen Algebra wird zu einer beliebigen Matrix $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ durch Basiswechsel deren Jordansche Normalform D konstruiert. D hat die Blockdiagonalform

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & D_k \end{pmatrix} , \tag{1.60}$$

wobei

$$D_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & & & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_j \times n_j} \,. \tag{1.61}$$

Hierbei sind $\lambda_j \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von A (müssen nicht voneinander verschieden sein), und es gilt
$$\sum_{j=1}^{k} n_j = n \,.$$

Wird der Basiswechsel durch die invertierbare Matrix $T \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ beschrieben, so ist

$$A = T^{-1} D T \,. \tag{1.62}$$

Nach Lemma 1.14 gilt dann
$$e^{tA} = T^{-1} e^{tD} T \,. \tag{1.63}$$

Aus der Blockdiagonalform von D,

$$D = \operatorname{diag}(D_1, \ldots, D_k)$$

folgt wie in Lemma 1.9
$$e^{tD} = \operatorname{diag}(e^{tD_1}, \ldots, e^{tD_k}) \,. \tag{1.64}$$

Gemäß (1.61) ist

$$D_j = \lambda_j I + N_j \,, \quad N_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_j \times n_j} \,, \tag{1.65}$$

und daher
$$e^{tD_j} = e^{t(\lambda_j I + N_j)} = e^{\lambda_j t I} e^{tN_j} = e^{\lambda_j t} e^{tN_j} \,. \tag{1.66}$$

Es ist

$$N_j^\mu = (\delta_{i,k-\mu})_{1\le i,k\le n_j}\,, \quad 0 \le \mu \le n_j - 1\,, \tag{1.67}$$

(Kronecker-Delta), und $N_j^\mu = 0$ für $\mu \ge n_j$. (Induktionsbeweis: $\mu = 1$ klar, $\mu \to \mu + 1$:

$$(N_j^{\mu+1})_{il} = (N_j^\mu N_j)_{il} = \sum_k \delta_{i,k-\mu}\delta_{k,l-1} = \delta_{i,l-(\mu+1)}\,.$$

Es folgt

$$e^{tN_j} = \sum_{\mu=0}^{n_j-1} \frac{t^\mu}{\mu!} N_j^\mu = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & t \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.68}$$

Zusammen mit den Formeln

$$e^{tA} = T^{-1}e^{tD}T\,, \quad e^{tD} = \operatorname{diag}(e^{tD_1}, \ldots, e^{tD_k})\,, \quad e^{tD_j} = e^{\lambda_j t}e^{tN_j}\,. \tag{1.69}$$

ist damit das Problem der Berechnung von e^{tA} zurückgeführt worden auf das Problem der Linearen Algebra, die Jordansche Normalform von A zu bestimmen. Dazu muß man die Eigenwerte λ_j von A und die zugehörigen Eigenvektoren bzw. verallgemeinerten Eigenvektoren (welche die Spalten von T bilden) berechnen. Für eine allgemeine Matrix A wollen wir das nicht weiter verfolgen, sondern uns darauf beschränken, uns die Struktur der Lösungen klar zu machen. Aus (1.68) und (1.69) folgt, dass alle Lösungen von $y' = Ay$,

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

aus Komponentenfunktionen y_i bestehen, welche Linearkombinationen von Funktionen der Form

$$t^l e^{\lambda t}$$

sind. Hierbei ist λ Eigenwert von A, und der mögliche Wertebereich der Exponenten l hängt von der Größe der zugehörigen Jordan-Kästchen D_j ab. Ist A diagonalisierbar, so treten keine Exponenten $l > 0$ auf, und die Lösungen haben die Form

$$y(t) = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} c_\lambda e^{\lambda t}\,, \quad c_\lambda = \begin{pmatrix} c_{\lambda,1} \\ \vdots \\ c_{\lambda,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n\,,$$

wobei $\sigma(A)$ die Menge der Eigenwerte von A bezeichnet und die Koeffizienten c_λ durch die Eigenvektoren von A und die Anfangsbedingung y_0 festgelegt sind.

Etwas genauer betrachten wir den Spezialfall einer einzelnen Differentialgleichung n-ter Ordnung, bei dem eine Funktion $z : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ gesucht wird als Lösung von

$$z^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{(k)} = 0\,, \quad a_k \in \mathbb{K}\,. \tag{1.70}$$

Das zugehörige System erster Ordnung ist

$$y' = Ay\,, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(n,n)}\,. \tag{1.71}$$

Die Eigenwerte von A sind (siehe Lineare Algebra) die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A)\,, \quad \lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \lambda & -1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix}\,. \tag{1.72}$$

Es gilt (siehe Übung)

$$p(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k\,. \tag{1.73}$$

Sei

$$\tilde{L} = \{z |\, z : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ z \text{ löst } (1.70)\} \tag{1.74}$$

die Lösungsmenge von (1.70).

Satz 1.15 *Seien $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\tilde{L} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \{t^l e^{\lambda t} :\ \lambda \textit{ ist Nullstelle von } p,\ 0 \le l < n_\lambda\}\,, \tag{1.75}$$

wobei n_λ die Vielfachheit der Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms p aus (1.73) ist.

Notation: Ist X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, so bezeichnet

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{x_1, \ldots, x_k\} = \{\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j \,:\, \alpha_j \in \mathbb{K},\ 1 \le j \le k\}$$

den von den Vektoren $x_1, \ldots, x_k \in X$ aufgespannten Unterraum.

Die Schreibweise "$\{t^l e^{\lambda t}$:" in (1.75) ist anschaulich und kurz, aber eigentlich nicht korrekt. Korrekt wäre

$$\operatorname{span}_{\mathbb{C}} \{f |\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ hat die Form } f(t) = t^l e^{\lambda t},\ \text{wobei } \lambda \text{ Nullstelle ist von } p, \text{ und } 0 \le l < n_\lambda\}\,. \tag{1.76}$$

Beweis: Sei λ Eigenwert von A, dann ist $\det(\lambda I - A) = 0$ und weiter $\operatorname{rang}(\lambda I - A) = n - 1$, da die ersten $n-1$ Zeilen von $\lambda I - A$ linear unabhängig sind. In der Jordanschen

Normalform (1.60), (1.61) haben daher alle Jordankästchen D_j verschiedene Eigenwerte, und die Größe des zu einem Eigenwert λ gehörenden Jordankästchens ist gleich dessen Vielfachheit n_λ. Bezeichnen wir mit V den durch die rechte Seite von (1.75) definierten Vektorraum, so ist also jedes Matrixelement von e^{tA} in V enthalten, dasselbe gilt auch für jede Komponente y_i jeder Lösung $y(t) = e^{tA}y_0$ und damit insbesondere für $z = y_1$. Also ist

$$\tilde{L} \subset V\,, \quad \dim(V) \le n\,.$$

Um zu zeigen, dass $\tilde{L} = V$, brauchen wir nur noch zu zeigen, dass $\dim(\tilde{L}) = n$. Der Lösungsraum L des zugeordneten Systems $y' = Ay$ hat Dimension n nach Satz 1.13. Sei $\{w_1, \ldots, w_n\}$ Basis von L. Wir behaupten, dass durch $z_i = w_{i,1}$ eine Basis von $\tilde{L}$ definiert wird. Zunächst sind alle z_i Lösungen von (1.70). Seien

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i z_i = 0\,, \quad \gamma_i \in \mathbb{C}\,.$$

Dann folgt

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i z_i^{(k)} = 0$$

für alle Ableitungen, also auch

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i w_i = \sum_{i=1}^n \gamma_i \begin{pmatrix} z_i \\ \vdots \\ z_i^{(n-1)} \end{pmatrix} = 0\,.$$

Da die w_i linear unabhängig sind, folgt $\gamma_i = 0$ für alle i und damit die lineare Unabhängigkeit der z_i. $\square$

Die Lösungen von (1.70) sind also genau die Funktionen der Form

$$z(t) = \sum_{\lambda \in N(p)} \sum_{0 \le l < n_\lambda} c_{\lambda,l} t^l e^{\lambda t}\,, \tag{1.77}$$

wobei $N(p)$ die Menge der Nullstellen des charakteristischen Polynoms p ist. Das zugehörige Anfangswertproblem lautet

$$z^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{(k)} = 0\,, \qquad z(0) = z_0\,, \quad z'(0) = z_1\,, \ldots, z^{(n-1)}(0) = z_{n-1}\,, \tag{1.78}$$

mit gegebenen Anfangswerten $z_i \in \mathbb{K}$. Diese Anfangswertaufgabe hat nach Satz 1.12, angewendet auf das zugehörige System $y' = Ay$, eine eindeutige Lösung. Die n Anfangsbedingungen in (1.78) legen daher die n Freiheitsgrade $c_{\lambda,l}$ in (1.77) eindeutig fest.

Wir betrachten nun den reellen Fall, das heißt, wir setzen die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$ der Differentialgleichung als reell voraus und suchen eine Basis des Lösungsraums

$$\tilde{L}_R = \{z |\, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ z \text{ löst } (1.70)\}\,, \tag{1.79}$$

aufgefaßt als Vektorraum über $\mathbb{R}$. Für das charakteristische Polynom gilt nun

$$\overline{p(\mu)} = \overline{\mu^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mu^k} = p(\overline{\mu}) \,, \quad \text{für alle } \mu \in \mathbb{C} \,, \tag{1.80}$$

also ist

$$\lambda \in N(p) \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{\lambda} \in N(p) \,. \tag{1.81}$$

Nach einem grundlegenden Satz der Algebra existiert in $\mathbb{C}$ eine Faktorisierung

$$p(\mu) = \prod_{\lambda \in N(p)} (\mu - \lambda)^{n_\lambda} \,, \tag{1.82}$$

welche außerdem eindeutig bestimmt ist, also folgt aus

$$\prod_{\lambda \in N(p)} (\mu - \lambda)^{n_\lambda} = p(\mu) = \overline{p(\overline{\mu})} = \prod_{\lambda \in N(p)} (\mu - \overline{\lambda})^{n_\lambda} \,, \tag{1.83}$$

dass

$$n_\lambda = n_{\overline{\lambda}} \,. \tag{1.84}$$

Wir bilden eine Menge B, welche besteht aus den Funktionen

$$t^l e^{\lambda t} \,, \quad 0 \le l < n_\lambda \tag{1.85}$$

für alle reellen $\lambda \in N(p)$, und den Funktionen

$$t^l e^{at} \cos \omega t \,, \; t^l e^{at} \sin \omega t \,, \quad 0 \le l < n_\lambda \,, \tag{1.86}$$

für alle Paare $(\lambda, \overline{\lambda}) = (a + i\omega, a - i\omega)$ konjugiert komplexer Nullstellen von p. Wegen

$$e^{\lambda t} = e^{at} \cos \omega t + i e^{at} \sin \omega t \,, \quad e^{\overline{\lambda} t} = e^{at} \cos \omega t - i e^{at} \sin \omega t \,, \tag{1.87}$$

ist

$$\tilde{L} \subset \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(B) \,, \tag{1.88}$$

und da B gemäß der Ausführungen weiter oben n Elemente hat, gilt

$$\tilde{L} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(B) \,, \tag{1.89}$$

und B ist damit Basis von $\tilde{L}$. Es folgt

$$\tilde{L}_R \subset \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(B) \,, \tag{1.90}$$

und da $\dim_{\mathbb{R}}(\tilde{L}_R) = n$ nach Satz 1.13, folgt

Satz 1.16 *Die Menge B bildet eine Basis des Lösungsraums $\tilde{L}_R$, aufgefaßt als Vektorraum über $\mathbb{R}$.* □

Wir beschäftigen uns schließlich mit der Anfangswertaufgabe

$$y' = ay + b(t)\,, \quad y(t_0) = y_0\,. \tag{1.91}$$

Hier sind $a, y_0 \in \mathbb{K}$ sowie eine Funktion $b : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ gegeben, gesucht ist die Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$. Die Funktion b heißt die Inhomogenität der Differentialgleichung

$$y' = ay + b(t)\,,$$

die Differentialgleichung selbst heißt inhomogen (in Übertragung derselben Begriffsbildung für lineare Gleichungssysteme). Wie man unmittelbar nachrechnet, ist

$$y(t) = e^{(t-t_0)a}\left(y_0 + \int_{t_0}^t e^{-(s-t_0)a} b(s)\,ds\right) = e^{(t-t_0)a} y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)a} b(s)\,ds \tag{1.92}$$

eine Lösung von (1.91). Beispiel: Das Anfangswertproblem

$$y' = -ay + \sin t\,, \quad y(0) = 0\,, \tag{1.93}$$

hat die Lösung

$$y(t) = \int_0^t e^{-(t-s)a} \sin s\,ds = \frac{1}{1+a^2}(1 - \cos t - a \sin t)\,. \tag{1.94}$$

Ein wichtiges Werkzeug zur expliziten Lösung inhomogener Differentialgleichungen stellt die Laplace-Transformation dar, die wir aber hier nicht besprechen wollen. Genau wie beim Problem der Bestimmung einer Stammfunktion wird es aber oft so sein, dass selbst für einfach aussehende Inhomogenitäten b keine mit den uns bekannten elementaren Funktionen angebbare explizite Lösung existiert. Durch die Entwicklung leistungsfähiger Programmsysteme der Computeralgebra läßt sich das Finden expliziter Lösungen mehr und mehr dem Computer übertragen.

Wir betrachten nun die inhomogene lineare Anfangswertaufgabe

$$y' = Ay + b(t)\,, \quad y(t_0) = y_0\,. \tag{1.95}$$

Satz 1.17 *Seien $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ stetig, $y_0 \in \mathbb{K}^n$. Die eindeutige Lösung von (1.95) ist gegeben durch*

$$y(t) = e^{(t-t_0)A}\left(y_0 + \int_{t_0}^t e^{-(s-t_0)A} b(s)\,ds\right)\,. \tag{1.96}$$

Beweis: Es ist

$$y'(t) = Ay(t) + e^{(t-t_0)A} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_{t_0}^t e^{-(s-t_0)A} b(s)\,ds = Ay(t) + e^{(t-t_0)A} e^{-(t-t_0)A} b(t) \tag{1.97}$$

$$= Ay(t) + b(t)\,. \tag{1.98}$$

Seien nun $y, \tilde{y}$ zwei Lösungen, sei $z = y - \tilde{y}$. Dann gilt

$$z'(t) = Ay(t) + b(t) - A\tilde{y}(t) - b(t) = Az(t)\,, \quad z(t_0) = 0\,.$$

Nach Satz 1.12 ist $z = 0$ die eindeutige Lösung dieser Anfangswertaufgabe. □

2 Maße

Einige Bemerkungen zur Motivation. Der mathematische Begriff eines **Maßes** ist in ganz unterschiedlichen (mathematischen) Zusammenhängen hilfreich.

- Man möchte einer möglichst großen Klasse von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ einen "Inhalt" (Länge, Fläche, Volumen, ...) zuordnen. Für nichtganzzahlige Dimensionen führt dies auf den Begriff der fraktalen Menge, bei deren Untersuchung das sogenannte Hausdorffmaß eine zentrale Rolle spielt.
- Hausdorff hat aber bereits 1914 gezeigt: Will man einen Inhaltsbegriff haben, der sich hinsichtlich Summation, Kongruenz und Grenzprozeß "vernünftig" verhält, so kann man ihn **nicht** für jede Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ definieren.
- Betrachtet man die Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ als die Menge aller "Elementarereignisse" beim Würfeln, so kann man als Maß einer Teilmenge A von M die Wahrscheinlichkeit ansehen, mit der in einem Wurf eine Zahl in A gewürfelt wird. Der Begriff des Maßes ist für die gesamte Stochastik grundlegend. Da Wahrscheinlichkeiten je nach Situation ganz unterschiedlich aussehen können, ist es wesentlich, einen allgemeinen Maßbegriff zu haben.
- Man möchte eine möglichst allgemeine und handhabbare Integrationstheorie haben.
- In der "höheren Analysis", etwa der Funktionalanalysis, spielt der Maßbegriff an vielen Stellen eine Rolle unter anderem wegen des folgenden Sachverhalts. Ist K ein kompakter metrischer Raum, etwa $K = [a, b]$, und ist $T : C(K) \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional, welches bezüglich der Supremumsnorm auf $C(K)$ stetig ist, so gibt es ein Maß μ mit der Eigenschaft, daß $T(f)$ gerade das Integral von f bezüglich des Maßes μ ist. Das hat zur Folge, dass bei der Untersuchung solcher Funktionale die Integrationstheorie eingesetzt werden kann.

Definition 2.1 (σ-Algebra)
Sei Ω eine Menge. Ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen von Ω, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, heißt σ-Algebra in Ω, falls gilt

$$\Omega \in \mathcal{A}\,, \tag{2.1}$$

$$A \in \mathcal{A} \qquad \Rightarrow \qquad \Omega \setminus A \in \mathcal{A}\,, \tag{2.2}$$

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathcal{A} \qquad \Rightarrow \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}\,. \tag{2.3}$$

Die Elemente A von $\mathcal{A}$ heißen $\mathcal{A}$-messbar (oder messbar, falls klar ist, welches $\mathcal{A}$ gemeint ist). □

Triviale Beispiele von σ-Algebren in Ω sind

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)\,, \quad \mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}\,.$$

Lemma 2.2 *Seien Ω, Ω' Mengen, $T : \Omega \to \Omega'$ Abbildung, $\mathcal{A}'$ σ-Algebra in Ω'. Dann ist*

$$\mathcal{A} = \{T^{-1}(A') : \, A' \in \mathcal{A}'\} \tag{2.4}$$

eine σ-Algebra in Ω.

Beweis: Es ist $\Omega = T^{-1}(\Omega') \in \mathcal{A}$. Sei $A \in \mathcal{A}$, wähle $A = T^{-1}(A')$ mit $A' \in \mathcal{A}$, dann ist

$$\Omega \setminus A = \Omega \setminus T^{-1}(A') = T^{-1}(\Omega' \setminus A') \in \mathcal{A} \,,$$

da $\Omega' \setminus A' \in \mathcal{A}'$. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{A}$, wähle $A'_n \in \mathcal{A}'$ mit $A_n = T^{-1}(A'_n)$, dann ist

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^{-1}(A'_n) = T^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n\right) \in \mathcal{A} \,.$$

□

Lemma 2.3 *Sei Ω Menge, $\mathcal{A}$ σ-Algebra in Ω. Dann gilt*

$$\emptyset \in \mathcal{A} \,, \tag{2.5}$$

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ Folge in } \mathcal{A} \qquad \Rightarrow \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \,. \tag{2.6}$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus der Definition einer σ-Algebra, da

$$\emptyset = \Omega \setminus \Omega \,, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega \setminus \left(\Omega \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \Omega \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\Omega \setminus A_n) \,.$$

□

Satz 2.4 *Sei Ω Menge, sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Dann ist*

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap \{\mathcal{A} : \, \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega), \, \mathcal{A} \textit{ ist } \sigma\textit{-Algebra}, \, \mathcal{E} \subset \mathcal{A}\} \tag{2.7}$$

eine σ-Algebra in Ω mit der Eigenschaft

$$\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A} \tag{2.8}$$

für jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, das heißt, $\sigma(\mathcal{E})$ ist die kleinste σ-Algebra, welche $\mathcal{E}$ umfasst. Die σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ heißt die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra in Ω.

Beweis: Die Elemente von $\sigma(\mathcal{E})$ sind genau diejenigen Teilmengen A von Ω, die in jeder σ-Algebra liegen, welche $\mathcal{E}$ umfasst. Da das insbesondere auf die Elemente E von $\mathcal{E}$ zutrifft, folgt die Eigenschaft (2.8) unmittelbar aus der Definition von $\sigma(\mathcal{E})$. Es ist $\Omega \in \sigma(\mathcal{E})$, da $\Omega \in \mathcal{A}$ für jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ in Ω. Ist $A \in \sigma(\mathcal{E})$, so ist $A \in \mathcal{A}$ für alle σ-Algebren $\mathcal{A}$, welche $\mathcal{E}$ umfassen, also auch $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ für alle solche σ-Algebren, und damit $\Omega \setminus A \in \sigma(\mathcal{E})$. Analog zeigt man, dass (2.3) für $\sigma(\mathcal{E})$ erfüllt ist. □

Definition 2.5 (Borel-Algebra)
Sei (Ω, d) metrischer Raum, sei

$$\mathcal{O} = \{U : U \in \Omega, U \textit{ offen}\} . \tag{2.9}$$

Die σ-Algebra $\sigma(\mathcal{O})$ heißt die Borel-Algebra in (Ω, d). Die Elemente $A \in \sigma(\mathcal{O})$ heißen Borelmengen. □

Wir führen halboffene Intervalle im $\mathbb{R}^n$ ein. Sind $a, b \in \mathbb{R}^n$, so setzen wir

$$[a, b) = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i) = \{x : x \in \mathbb{R}^n, \, a_i \le x_i < b_i \text{ für alle } 1 \le i \le n\} . \tag{2.10}$$

Es ist $[a, b) = \emptyset$ falls $a_i \ge b_i$ für mindestens ein i. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{J}^n = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}^n\} \tag{2.11}$$

die Menge aller halboffenen Intervalle im $\mathbb{R}^n$, und mit

$$\mathcal{O}^n \, , \, \mathcal{C}^n \, , \, \mathcal{K}^n \tag{2.12}$$

die Menge aller offenen bzw. abgeschlossenen bzw. kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Satz 2.6 *Es gilt*

$$\sigma(\mathcal{J}^n) = \sigma(\mathcal{O}^n) = \sigma(\mathcal{C}^n) = \sigma(\mathcal{K}^n) \, , \tag{2.13}$$

das heißt, die Borel-Algebra wird auch von den halboffenen Intervallen bzw. den abgeschlossenen Mengen bzw. den kompakten Mengen erzeugt.

Beweis: Es ist $\mathcal{C}^n = \{A : \mathbb{R}^n \setminus A \text{ ist offen}\}$. Aus Satz 2.4 folgen $\mathcal{C}^n \subset \sigma(\mathcal{O}^n)$ und $\sigma(\mathcal{C}^n) \subset \sigma(\mathcal{O}^n)$. Analog beweist man $\sigma(\mathcal{O}^n) \subset \sigma(\mathcal{C}^n)$. Aus $\mathcal{K}^n \subset \mathcal{C}^n$ folgt $\mathcal{K}^n \subset \sigma(\mathcal{C}^n)$ und damit $\sigma(\mathcal{K}^n) \subset \sigma(\mathcal{C}^n)$. Umgekehrt: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Wir setzen

$$K_n = A \cap \{x : x \in \mathbb{R}^n, \, \|x\| \le n\} .$$

Dann ist K_n kompakt und $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, also $A \in \sigma(\mathcal{K}^n)$. Da A beliebig war, folgt $\mathcal{C}^n \subset \sigma(\mathcal{K}^n)$ und damit $\sigma(\mathcal{C}^n) \subset \sigma(\mathcal{K}^n)$. Wir zeigen zum Abschluss, dass $\sigma(\mathcal{J}^n) = \sigma(\mathcal{O}^n)$: Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$[a, b) = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k \, , \quad I_k := \prod_{i=1}^{n} (a_i - \frac{1}{k}, b_i) \, .$$

Alle I_k sind offen, also ist $[a, b) \in \sigma(\mathcal{O}^n)$. Da a, b beliebig waren, folgt $\sigma(\mathcal{J}^n) \subset \sigma(\mathcal{O}^n)$ wie gehabt. Zum Beweis der umgekehrten Inklusion betrachten wir zunächst offene Quader

$$(a, b) := \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \, , \quad I_k := \prod_{i=1}^{n} [a_i + \frac{1}{k}, b_i) \, ,$$

welche also alle in $\sigma(\mathcal{J}^n)$ liegen. Da jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ sich als abzählbare Vereinigung von offenen Quadern darstellen läßt (im Zweifelsfall: Übung), folgt $\mathcal{O}^n \subset \sigma(\mathcal{J}^n)$ und wieder $\sigma(\mathcal{O}^n) \subset \sigma(\mathcal{J}^n)$. □

Das in Satz 2.4 enthaltene Verfahren, von einem Ausgangsobjekt (dort $\mathcal{E}$) ein kleinstes umfassendes neues Objekt mit mehr Struktur (dort $\sigma(\mathcal{E})$) zu erzeugen, ist auch in anderen mathematischen Zusammenhängen nützlich. So kann man etwa für Teilmengen M des $\mathbb{R}^n$ den von M erzeugten Untervektorraum span (M) definieren als den Durchschnitt aller Unterräume, welche E enthalten. Wir können span (M) aber auch definieren als die Menge aller endlichen Linearkombinationen von Elementen aus E. Diese Definition ist konstruktiver als die vorstehende. Für die Borel-Algebra steht eine vergleichbar einfache Konstruktion einer beliebigen Borelmenge aus den offenen Mengen aber leider **nicht** zur Verfügung.

Definition 2.7 (Maß)
Sei Ω Menge, $\mathcal{A}$ σ-Algebra in Ω. Eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ heißt Maß, falls gilt

$$\mu(\emptyset) = 0\,, \tag{2.14}$$

und falls μ σ-additiv ist, das heißt, falls

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{2.15}$$

für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter $\mathcal{A}$-messbarer Mengen gilt. Ein Maß μ heißt endlich, falls $\mu(\Omega) < +\infty$. Ein Maß μ heißt σ-endlich, falls es eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{A}$-messbaren Mengen gibt mit $\mu(A_n) < +\infty$ für alle n und

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega\,. \tag{2.16}$$

□

Wir gehen aus von der üblichen Vorstellung von Länge, Flächeninhalt und Volumen und definieren das Volumen eines halboffenen Intervalls (Quaders) $I = [a, b) \subset \mathbb{R}^n$ durch

$$\lambda(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)\,. \tag{2.17}$$

Es erhebt sich die Frage: Können wir auf der Borel-Algebra $\sigma(\mathcal{O}^n)$ ein Maß μ definieren, so daß $\mu(I) = \lambda(I)$ für alle halboffenen Intervalle ? Diese Frage wird im sogenannten **Maßerweiterungssatz** positiv beantwortet. Dieser Satz erfordert aber etwas Vorbereitung.

Definition 2.8 (Ring)
Sei Ω Menge. Ein System $\mathcal{R}$ von Teilmengen von Ω heißt ein Ring in Ω, falls gilt

$$\emptyset \in \mathcal{R}\,, \tag{2.18}$$

$$A, B \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad A \setminus B \in \mathcal{R}\,, \tag{2.19}$$

$$A, B \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{R}\,. \tag{2.20}$$

□

Aus (2.19) folgt unmittelbar, dass

$$A, B \in \mathcal{R} \qquad \Rightarrow \qquad A \cap B \in \mathcal{R}\,,$$

da $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$. Offenbar ist jede σ-Algebra ein Ring.

Die Bezeichnung ‘Ring’ rührt daher, dass ein Ring von Mengen im Sinne von Definition 2.8 auch ein Ring im Sinne der Algebra ist, wenn wir als Multiplikation in $\mathcal{R}$ die Durchschnittsbildung und als Addition die symmetrische Differenz

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

definieren.

Die Menge der halboffenen Intervalle ist kein Ring, im allgemeinen sind weder $I \cup J$ noch $I \setminus J$ halboffene Intervalle, falls I, J solche sind. Andererseits lassen sich sowohl $I \cup J$ als auch $I \setminus J$ als endliche Vereinigung von halboffenen Intervallen darstellen.

Definition 2.9 (Figur)
Eine Menge $F \subset \mathbb{R}^n$ heißt Figur, falls F sich als endliche Vereinigung von halboffenen Intervallen darstellen lässt. Wir definieren

$$\mathcal{F}^n = \{F : F \subset \mathbb{R}^n,\ F \textit{ ist Figur}\}\,. \tag{2.21}$$

Lemma 2.10 *Seien $I, J \in \mathcal{J}^n$. Dann ist auch $I \cap J \in \mathcal{J}^n$, und $I \setminus J$ lässt sich als disjunkte endliche Vereinigung von halboffenen Intervallen darstellen. Insbesondere gilt $I \setminus J \in \mathcal{F}^n$.*

Beweis: Seien $I = [a, b)$, $J = [a', b')$. Dann ist

$$I \cap J = [a'', b'') \in \mathcal{J}^n\,, \quad a_i'' = \max\{a_i, a_i'\}\,, \quad b_i'' = \min\{b_i, b_i'\}\,. \tag{2.22}$$

Wegen $I \setminus J = I \setminus (I \cap J)$ und (2.22) genügt es, den Fall $J \subset I$ zu betrachten. Es ist dann entweder $J = \emptyset$ oder

$$a_i \le a_i' < b_i' \le b_i\,, \quad 1 \le i \le n\,.$$

$I \setminus J$ ist disjunkte Vereinigung von Intervallen der Form

$$\prod_{i=1}^{n} [c_i, d_i)\,,$$

wobei $[c_i, d_i)$ entweder gleich $[a_i, a_i')$ oder gleich $[a_i', b_i')$ oder gleich $[b_i', b_i)$ ist. (Man erhält $I \setminus J$, indem man alle möglichen Kombinationen durchläuft bis auf diejenige, welche J liefert.) $\square$

Satz 2.11 *$\mathcal{F}^n$ ist ein Ring. Jedes $F \in \mathcal{F}^n$ lässt sich darstellen als disjunkte Vereinigung von halboffenen Intervallen.*

Beweis: Direkt aus der Definition folgt

$$F, G \in \mathcal{F}^n \qquad \Rightarrow \qquad F \cup G \in \mathcal{F}^n \,. \tag{2.23}$$

Wir zeigen als nächstes

$$F, G \in \mathcal{F}^n \qquad \Rightarrow \qquad F \cap G \in \mathcal{F}^n \,. \tag{2.24}$$

Sei nämlich

$$F = \bigcup_{i=1}^{k} I_i \,, \quad G = \bigcup_{j=1}^{l} J_j \,, \tag{2.25}$$

mit $I_i, J_j \in \mathcal{J}^n$, dann folgt

$$F \cap G = \bigcup_{i,j} I_i \cap J_j \,,$$

und nach Lemma 2.10 ist $I_i \cap J_j \in \mathcal{J}^n$ für alle i, j, also gilt (2.24). Wir zeigen jetzt

$$F, G \in \mathcal{F}^n \qquad \Rightarrow \qquad F \setminus G \in \mathcal{F}^n \,. \tag{2.26}$$

Aus der Darstellung (2.25) folgt

$$\begin{aligned} F \setminus G &= \left(\bigcup_i I_i \right) \setminus \left(\bigcup_j J_j \right) = \left(\bigcup_i I_i \right) \cap \left(\Omega \setminus \bigcup_j J_j \right) \\ &= \left(\bigcup_i I_i \right) \cap \bigcap_j (\Omega \setminus J_j) = \bigcup_i \bigcap_j (I_i \cap (\Omega \setminus J_j)) \\ &= \bigcup_i \bigcap_j (I_i \setminus J_j) \,. \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.10 ist $I_i \setminus J_j \in \mathcal{F}^n$ für alle i, j, also ist wegen (2.24) auch $F \setminus G \in \mathcal{F}^n$. Also ist $\mathcal{F}^n$ ein Ring. Sind die Darstellungen von $F, G \in \mathcal{F}^n$ in (2.25) disjunkte Vereinigungen, so gilt das auch für deren Durchschnitt,

$$F \cap G = \dot{\bigcup_{i,j}} I_i \cap J_j \,. \tag{2.27}$$

Wir zeigen nun, dass sich jedes $F \in \mathcal{F}^n$ als disjunkte Vereinigung halboffener Intervalle darstellen lässt. Sei $F \in \mathcal{F}^n$,

$$F = \bigcup_{i=1}^{k} I_i \,.$$

Es gilt dann

$$F = I_1 \,\dot\cup\, (I_2 \setminus I_1) \,\dot\cup\, (I_3 \setminus (I_1 \cup I_2)) \cdots = \dot{\bigcup_i} \bigcap_{j=1}^{i-1} (I_i \setminus I_j) \,.$$

Nach Lemma 2.10 lassen sich alle $I_i \setminus I_j$ als disjunkte Vereinigung halboffener Intervalle darstellen, dasselbe gilt auch für die Mengen

$$\bigcap_{j=1}^{i-1} (I_i \setminus I_j) \,,$$

(ist in (2.27) für den Durchschnitt zweier Mengen bewiesen worden, gilt also auch für endliche Durchschnitte). Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Definition 2.12 (Endlich-additive Mengenfunktion)
Sei Ω Menge, $\mathcal{R}$ Ring in Ω. Eine Funktion $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ heißt endlich-additiv, falls gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \tag{2.28}$$

für jedes endliche System $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkter Mengen $A_i \in \mathcal{R}$. μ heißt σ-additiv, falls

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \tag{2.29}$$

gilt für jede Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen $A_i \in \mathcal{R}$ mit $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$. □

Satz 2.13 *Der n-dimensionale Elementarinhalt*

$$\lambda(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)\,, \quad I = [a, b) \in \mathcal{J}^n\,, \tag{2.30}$$

lässt sich auf genau eine Weise zu einer endlich-additiven Funktion $\lambda : \mathcal{F}^n \to [0, \infty)$ fortsetzen.

Beweis: Wir bemerken zunächst: Wird $I = [a, b)$ durch eine Hyperebene $x_j = \gamma$, $\gamma \in [a_j, b_j)$, in zwei Teile

$$\begin{aligned} I_1 &= [(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, \gamma, \ldots, b_n))\,, \\ I_2 &= [(a_1, \ldots, \gamma, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_j, \ldots, b_n))\,, \end{aligned}$$

zerschnitten, so gilt

$$\lambda(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = [(b_j - \gamma) + (\gamma - a_j)] \prod_{i \neq j} (b_i - a_i) = \lambda(I_1) + \lambda(I_2)\,.$$

Ebenso folgt

$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^{k} \lambda(I_i)\,, \tag{2.31}$$

falls ein Intervall I durch endlich viele Hyperebenen in k Teilintervalle $I_i \in \mathcal{J}^n$ zerschnitten wird. Wir zeigen nun, dass λ auf $\mathcal{J}^n$ endlich-additiv ist. Sei $I = [a, b) \in \mathcal{J}^n$ dargestellt als disjunkte Vereinigung

$$I = \bigcup_{i=1}^{k} I_i\,, \quad I_i = [a^i, b^i) \in \mathcal{J}^n\,.$$

Wir zerschneiden I durch alle Hyperebenen der Form

$$x_j = a_j^i\,, \quad x_j = b_j^i\,, \quad 1 \le i \le k\,,\, 1 \le j \le n\,.$$

Dadurch wird I in endlich viele Teilintervalle zerlegt; diejenigen, welche in I_i enthalten sind, bilden eine disjunkte Zerlegung J_{ij}, $1 \leq j \leq k_i$, von I_i durch Zerschneiden. Nach (2.31) gilt dann

$$\lambda(I) = \sum_{i,j} \lambda(J_{ij}) = \sum_i \sum_j \lambda(J_{ij}) = \sum_i \lambda(I_i) \,. \tag{2.32}$$

Wir definieren nun die Fortsetzung von λ auf $\mathcal{F}^n$. Sei $F \in \mathcal{F}^n$. Nach Satz 2.11 lässt sich F schreiben als disjunkte Vereinigung

$$F = \bigcup_{i=1}^{k} I_i \,, \quad I_i \in \mathcal{J}^n \,.$$

Wir setzen

$$\lambda(F) = \sum_{i=1}^{k} \lambda(I_i) \,. \tag{2.33}$$

Wir müssen zeigen, dass diese Definition von der Wahl der Zerlegung (I_i) unabhängig ist. Ist

$$F = \bigcup_{j=1}^{l} J_j \,, \quad J_j \in \mathcal{J}^n \,,$$

eine weitere disjunkte Zerlegung, so gilt

$$I_i = \dot{\bigcup_j} (I_i \cap J_j) \,, \quad J_j = \dot{\bigcup_i} (I_i \cap J_j) \,,$$

also, da λ auf $\mathcal{J}^n$ endlich-additiv ist,

$$\sum_i \lambda(I_i) = \sum_i \sum_j \lambda(I_i \cap J_j) = \sum_j \lambda(J_j) \,.$$

Wir zeigen nun, dass λ endlich-additiv ist auf $\mathcal{F}$. Ist F dargestellt als disjunkte Vereinigung

$$F = \bigcup_{i=1}^{k} F_i \,, \quad F_i \in \mathcal{F} \,,$$

so stellen wir die F_i einzeln als disjunkte Vereinigung dar,

$$F_i = \bigcup_j I_{ij} \,, \quad I_{ij} \in \mathcal{J}^n \,,$$

und es folgt

$$\lambda(F) = \sum_{i,j} \lambda(I_{ij}) = \sum_i \sum_j \lambda(I_{ij}) = \sum_i \lambda(F_i) \,.$$

Die Eindeutigkeit der Fortsetzung von λ ist offensichtlich, da (2.33) für jede endlich-additive Fortsetzung gelten muss. $\square$

Notation 2.14 *Sei Ω Menge, sei $E \subset \Omega$, sei $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Teilmengen von Ω. Wir schreiben*

$$E_n \downarrow E\,, \quad \text{falls } E_1 \supset E_2 \supset \dots\,, \quad E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\,, \tag{2.34}$$

und

$$E_n \uparrow E\,, \quad \text{falls } E_1 \subset E_2 \subset \dots\,, \quad E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\,. \tag{2.35}$$

Lemma 2.15 *Sei Ω Menge, $\mathcal{R}$ Ring in Ω, $\mu : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ endlich-additiv. Es gelte außerdem*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0 \tag{2.36}$$

für jede Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit $E_n \downarrow \emptyset$. Dann ist μ auch σ-additiv.

Beweis: Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweiser disjunkter Mengen $A_n \in \mathcal{R}$ mit

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}\,.$$

Wir setzen

$$E_n = A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k\,.$$

Dann gilt $E_n \downarrow \emptyset$ und, da μ endlich-additiv ist,

$$\mu(A) = \mu(E_n) + \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)\,.$$

Aus (2.36) folgt nun

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)\,.$$

□

Satz 2.16 (Rechenregeln für endlich-additive Mengenfunktionen)
Sei Ω Menge, $\mathcal{R}$ Ring auf Ω, $\mu : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ endlich-additiv. Dann gelten für beliebige $A, B, A_n \in \mathcal{R}$

$$\mu(A\cup B) + \mu(A\cap B) = \mu(A) + \mu(B)\,, \tag{2.37}$$

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \le \mu(B)\,, \tag{2.38}$$

$$A \subset B\,,\ \mu(A) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu(B\setminus A) = \mu(B) - \mu(A)\,, \tag{2.39}$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\,. \tag{2.40}$$

Ist μ außerdem σ-additiv, so gilt

$$A_0 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \Rightarrow \quad \mu(A_0) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,, \tag{2.41}$$

und insbesondere

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,, \tag{2.42}$$

falls $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$.

Beweis: Ist $A \subset B$, so ist $B = A \,\dot\cup\, (B \setminus A)$, also

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)\,. \tag{2.43}$$

Hieraus folgen (2.38) und (2.39). Ist $\mu(A \cap B) = \infty$, so gilt (2.37) trivialerweise, andernfalls folgt (2.37) aus

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)\,. \tag{2.44}$$

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A \cap B)\,. \tag{2.45}$$

Mit

$$B_i = A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k$$

gilt

$$B_i \in \mathcal{R}\,, \quad B_i \subset A_i\,, \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i\,,$$

die B_i sind paarweise disjunkt, also

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\,,$$

also folgt (2.40). Zum Beweis von (2.41) sei B_i wie eben definiert, dann gilt

$$A_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_0 \cap A_n) = \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} (A_0 \cap B_n)\,,$$

also

$$\mu(A_0) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_0 \cap B_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_0 \cap B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,,$$

da $A_0 \cap B_n \subset A_n$. □

Satz 2.17 *Die nach Satz 2.13 eindeutig bestimmte Fortsetzung* $\lambda : \mathcal{F}^n \to [0, \infty)$ *des Elementarinhalts*

$$\lambda([a, b)) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \tag{2.46}$$

ist σ*-additiv auf* $\mathcal{F}^n$.

Beweis: Wegen Satz 2.13 und Lemma 2.15 genügt es zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} \lambda(F_n) = 0$ gilt für jede Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Figuren mit $F_n \downarrow \emptyset$. Dazu genügt es zu zeigen: Ist $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend, das heißt $F_n \supset F_{n+1}$ für alle n, und gilt

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(F_n) = \delta > 0\,, \tag{2.47}$$

so ist

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset\,. \tag{2.48}$$

(Der Limes in (2.47) existiert, da $\lambda(F_n)$ monoton fallend und durch 0 nach unten beschränkt ist.) Zum Beweis dieser Aussage verwenden wir ein Kompaktheitsargument. Als ersten Schritt konstruieren wir $G_n \in \mathcal{F}^n$ mit $\overline{G_n} \subset F_n$ und

$$\lambda(F_n) - \lambda(G_n) \leq 2^{-n}\delta\,. \tag{2.49}$$

Die Mengen G_n werden folgendermaßen konstruiert: Ist

$$F_n = \bigcup_{i=1}^{m} I_i\,, \quad I_i = [a^i, b^i)\,,$$

so setzen wir

$$G_n = \bigcup_{i=1}^{m} \tilde{I}_i\,, \quad \tilde{I}_i = [a^i, b^i - \varepsilon_i(1,\ldots,1))\,,$$

wobei $\varepsilon_i > 0$ so klein gewählt wird, dass (2.49) gilt. Wir definieren

$$H_n = \bigcap_{i=1}^{n} G_i\,. \tag{2.50}$$

Dann gilt $H_n \in \mathcal{F}^n$,

$$H_{n+1} \subset H_n\,, \quad \overline{H_n} \subset F_n\,, \tag{2.51}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Als nächstes zeigen wir mit vollständiger Induktion, dass gilt

$$\lambda(H_n) \geq \lambda(F_n) - \delta(1 - 2^{-n}) \tag{2.52}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 1$ folgt (2.52) aus (2.49), da $H_1 = G_1$. Induktionsschritt $n \to n+1$: Es ist $H_{n+1} = G_{n+1} \cap H_n$, also mit (2.37) und (2.49)

$$\begin{aligned}
\lambda(H_{n+1}) &= \lambda(G_{n+1}) + \lambda(H_n) - \lambda(G_{n+1} \cup H_n) \\
&\geq \lambda(F_{n+1}) - 2^{-(n+1)}\delta + \lambda(F_n) - \delta(1 - 2^{-n}) - \lambda(F_n)\,, \qquad (\text{da } G_{n+1} \cup H_n \subset F_n) \\
&= \lambda(F_{n+1}) - \delta(1 - 2^{-(n+1)})\,.
\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $\lambda(F_n) \geq \delta$ ist für alle n, folgt aus (2.52)

$$\lambda(H_n) > 0\,, \tag{2.53}$$

also auch $H_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Mengen $\overline{H_n}$ sind beschränkt (da alle Figuren beschränkt sind), also kompakt. Für jede endliche Indexmenge $I \subset \mathbb{N}$ gilt

$$\bigcap_{i\in I} \overline{H_i} = \overline{H_m} \neq \emptyset\,, \quad m := \max\{i : i \in I\}\,,$$

also gilt, da die kompakte Menge $\overline{H_1}$ die endliche Durchschnittseigenschaft (siehe Analysis 2, Kapitel 15) besitzt,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{H_n} \neq \emptyset ,$$

woraus (2.48) wegen (2.50) folgt. $\square$

Als letzte Vorbereitung für den Maßerweiterungssatz führen wir noch den Begriff des Dynkin-Systems ein.

Definition 2.18 (Dynkin-System)
Sei Ω eine Menge. Ein System $\mathcal{D}$ von Teilmengen von Ω heißt Dynkin-System, falls gilt

$$\Omega \in \mathcal{D} , \tag{2.54}$$

$$D \in \mathcal{D} \qquad \Rightarrow \qquad \Omega \setminus D \in \mathcal{D} , \tag{2.55}$$

$$(D_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge paarweiser disjunkter Mengen in } \mathcal{D} \qquad \Rightarrow \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D} . \tag{2.56}$$

Offensichtlich ist jede σ-Algebra ein Dynkin-System.

Lemma 2.19 *Sei Ω Menge, $\mathcal{D}$ Dynkin-System in Ω. Dann gilt*

$$D, E \in \mathcal{D} , \, D \subset E \qquad \Rightarrow \qquad E \setminus D \in \mathcal{D} . \tag{2.57}$$

Beweis: Für $D, E \in \mathcal{D}$ mit $D \subset E$ gilt

$$E \setminus D = \Omega \setminus (D \cup (\Omega \setminus E)) \in \mathcal{D} ,$$

da D und $\Omega \setminus E$ disjunkt sind. $\square$

Satz 2.20 *Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem in Ω, sei $\mathcal{D}$ Dynkin-System mit*

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{E}) . \tag{2.58}$$

Ist $\mathcal{E}$ schnittstabil, das heißt,

$$E_1, E_2 \in \mathcal{E} \qquad \Rightarrow \qquad E_1 \cap E_2 \in \mathcal{E} , \tag{2.59}$$

so ist

$$\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{E}) . \tag{2.60}$$

Beweis: Wir definieren

$$\delta(\mathcal{E}) = \bigcap \{\mathcal{D} : \mathcal{D} \text{ ist Dynkin-System in } \Omega, \, \mathcal{E} \subset \mathcal{D}\} . \tag{2.61}$$

Wie in Satz 2.4 beweist man, dass $\delta(\mathcal{E})$ ein Dynkin-System ist, und zwar das kleinste, welches $\mathcal{E}$ enthält; es heißt das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System. Es gilt dann $\delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{E})$. Zum Beweis von (2.60) genügt es zu zeigen, dass $\delta(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist (dann folgt

$\sigma(\mathcal{E}) \subset \delta(\mathcal{E})$). Zu diesem Zweck definieren wir für beliebiges, aber fest gewähltes $D \in \delta(\mathcal{E})$ das Mengensystem

$$\mathcal{D}_D = \{Q:\ Q \subset \Omega\,,\ Q \cap D \in \delta(\mathcal{E})\}\,. \tag{2.62}$$

Wir zeigen, dass $\mathcal{D}_D$ ein Dynkin-System ist. Offensichtlich ist $\Omega \in \mathcal{D}_D$. Weiter gilt mit Lemma 2.19

$$\begin{aligned} Q \in \mathcal{D}_D \quad &\Rightarrow \quad (\Omega \setminus Q) \cap D = D \setminus Q = D \setminus (Q \cap D) \in \delta(\mathcal{E}) \\ &\Rightarrow \Omega \setminus Q \in \mathcal{D}_D\,, \end{aligned}$$

und für eine Folge $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweiser disjunkter Mengen in $\mathcal{D}_D$

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n\right) \cap D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (Q_n \cap D) \in \delta(\mathcal{E})\,,$$

da $Q_n \cap D \in \delta(\mathcal{E})$ und $\delta(\mathcal{E})$ Dynkin-System ist, also

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n \in \mathcal{D}_D\,.$$

$\mathcal{D}_D$ ist also Dynkin-System. Als nächstes zeigen wir

$$D \in \delta(\mathcal{E})\,,\ E \in \mathcal{E} \qquad \Rightarrow \qquad D \cap E \in \delta(\mathcal{E})\,. \tag{2.63}$$

Es ist nämlich

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_E\,, \tag{2.64}$$

da mit $E_1 \in \mathcal{E}$ auch $E_1 \cap E \in \mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ ist schnittstabil) und damit $E_1 \in \mathcal{D}_E$ (da $\mathcal{E} \subset \delta(\mathcal{E})$). Aus (2.64) folgt $\delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_E$ und damit $D \cap E \in \delta(\mathcal{E})$. Damit ist (2.63) bewiesen. Wir zeigen jetzt

$$D, E \in \delta(\mathcal{E}) \qquad \Rightarrow \qquad D \cap E \in \delta(\mathcal{E})\,. \tag{2.65}$$

Aus (2.63) folgt $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_D$, also wieder wegen der Minimalität von $\delta(\mathcal{E})$, dass $\delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_D$, und damit $E \cap D \in \delta(\mathcal{E})$. Schließlich zeigen wir, dass $\delta(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist. Sei eine Folge $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\delta(\mathcal{E})$ gegeben. Wir setzen

$$D_n' = \bigcup_{i=1}^{n} D_i\,, \quad D_0' = \emptyset\,.$$

Dann ist $D_0' \in \delta(\mathcal{E})$ und (mit Induktion über n) $D_n \setminus D_{n-1}' \in \delta(\mathcal{E})$ wegen (2.65), also auch

$$D_n' = (D_n \setminus D_{n-1}') \cup D_{n-1}' \in \delta(\mathcal{E})$$

als disjunkte Vereinigung zweier Mengen in $\delta(\mathcal{E})$. Die Mengen $D_n' \setminus D_{n-1}'$ sind paarweise disjunkt, also folgt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (D_n' \setminus D_{n-1}') \in \delta(\mathcal{E})\,.$$

Damit ist $\delta(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra. $\square$

Theorem 2.21 (Maßerweiterungssatz, Existenz)
Sei Ω Menge, $\mathcal{R}$ Ring in Ω, sei $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ eine σ-additive Mengenfunktion mit $\mu(\emptyset) = 0$. Dann kann μ zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ fortgesetzt werden.

Beweis: Der Beweis besteht aus zwei Teilen. Zuerst wird μ zu einem sogenannnten äußeren Maß $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ fortgesetzt; μ^* hat aber nicht alle Eigenschaften eines Maßes. Im zweiten Teil wird bewiesen, daß die Restriktion von μ^* auf $\sigma(\mathcal{R})$ ein Maß ist.
Zu beliebigem $Q \subset \Omega$ definieren wir die Menge $\mathcal{U}(Q)$ aller abzählbaren Überdeckungen von Q durch Mengen in $\mathcal{R}$,

$$\mathcal{U}(Q) = \{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} : \ A_n \in \mathcal{R} \text{ für alle } n,\ Q \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\}\,. \tag{2.66}$$

Wir definieren das zu μ gehörende "äußere Maß" $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ durch

$$\mu^*(Q) = \begin{cases} \inf_{\mathcal{U}(Q)} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,, & \text{falls } \mathcal{U}(Q) \neq \emptyset\,, \\ +\infty\,, & \text{falls } \mathcal{U}(Q) = \emptyset\,. \end{cases} \tag{2.67}$$

Offensichtlich gilt $\mu^*(Q) \geq 0$ für alle $Q \subset \Omega$. Es gilt weiter

$$\mu^*(A) = \mu(A)\,, \quad \text{für alle } A \in \mathcal{R}, \tag{2.68}$$

da einerseits $\mu^*(A) \leq \mu(A)$ wegen $(A, \emptyset, \emptyset, \dots) \in \mathcal{U}(A)$ und andererseits

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

für alle $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(A)$ nach 2.16, also auch $\mu(A) \leq \mu^*(A)$. μ^* ist also eine Fortsetzung von μ. Aus (2.68) folgt insbesondere

$$\mu^*(\emptyset) = 0\,. \tag{2.69}$$

Weiter gilt

$$Q_1 \subset Q_2 \qquad \Rightarrow \qquad \mu^*(Q_1) \leq \mu^*(Q_2)\,, \tag{2.70}$$

da $\mathcal{U}(Q_2) \subset \mathcal{U}(Q_1)$. Für eine beliebige Folge $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen von Ω gilt

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n)\,. \tag{2.71}$$

Ist nämlich $\mathcal{U}(Q_n) = \emptyset$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so hat die rechte Seite in (2.71) den Wert $+\infty$. Andernfalls wählen wir zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(A_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{U}(Q_n)$ mit

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_{nm}) \leq \mu^*(Q_n) + 2^{-n}\varepsilon\,,$$

dann ist

$$(A_{nm})_{n,m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right)\,,$$

und

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right) \leq \sum_{n,m=1}^{\infty} \mu(A_{nm}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n) + \varepsilon\,,$$

woraus (2.71) folgt. Wenden wir (2.71) auf die Folge $(Q \cap A, Q \setminus A, \emptyset, \dots)$ an, so folgt

$$\mu^*(Q) \le \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A)\,, \quad \text{für alle } A, Q \in \mathcal{P}(\Omega)\,. \tag{2.72}$$

Damit ist der erste Teil des Beweises abgeschlossen. Der zweite Teil beginnt mit der eigentlichen Idee dieses Existenzbeweises, auf C. Carathéodory (1914) zurückgeht. Wir definieren das Mengensystem

$$\mathcal{A} = \{A : \; A \subset \Omega, \; A \text{ erfüllt } (2.74)\}\,, \tag{2.73}$$

wobei

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A)\,, \quad \text{für alle } Q \subset \Omega\,. \tag{2.74}$$

Der Rest des Beweises besteht darin, zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist mit $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}$, und dass $\mu^*|\mathcal{A}$ ein Maß ist. Wir zeigen als erstes, dass

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{A}\,. \tag{2.75}$$

Seien $A \in \mathcal{R}$, $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$ beliebig. Wegen (2.72) ist in (2.74) nur "$\ge$" zu zeigen. Sei $\mathcal{U}(Q) \ne \emptyset$ (andernfalls ist $\mu^*(Q) = \infty$), sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Element von $\mathcal{U}(Q)$. Dann gilt

$$\mu(A_n) = \mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \setminus A)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A)\,,$$

also, da die Folgen $(A_n \cap A)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(A_n \setminus A)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{U}(Q \cap A)$ bzw. $\mathcal{U}(Q \setminus A)$ liegen,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \ge \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A)\,,$$

also (Übergang zum Infimum auf der linken Seite)

$$\mu^*(Q) \ge \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A)\,.$$

Damit ist (2.75) gezeigt. Direkt aus der Definition von $\mathcal{A}$ folgt

$$\Omega \in \mathcal{A}\,. \tag{2.76}$$

Weiter gilt

$$A \in \mathcal{A} \qquad \Rightarrow \qquad \Omega \setminus A \in \mathcal{A}\,, \tag{2.77}$$

da $Q \cap (\Omega \setminus A) = Q \setminus A$ und $Q \setminus (\Omega \setminus A) = Q \cap A$ für alle $Q \subset \Omega$ gelten und damit aus der Gültigkeit von (2.74) für A auch die Gültigkeit für $\Omega \setminus A$ folgt. Wir führen für den Rest des Beweises die abkürzende Schreibweise

$$A^c = \Omega \setminus A$$

für das Komplement einer Menge $A \subset \Omega$ ein. Wir zeigen als nächstes

$$A, B \in \mathcal{A} \qquad \Rightarrow \qquad A \cup B \in \mathcal{A}\,. \tag{2.78}$$

Sind nämlich $A, B \in \mathcal{A}$, so gilt für alle $Q \subset \Omega$

$$\begin{aligned}\mu^*(Q) &= \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^c) &(2.79)\\ &= \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B^c)\,. &(2.80)\end{aligned}$$

Setzen wir $Q \cap (A \cup B)$ ein statt Q in (2.79), so erhalten wir

$$\mu^*(Q \cap (A \cup B)) = \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B)\,, \tag{2.81}$$

und aus (2.79) und (2.81)

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap (A \cup B)) + \mu^*(Q \cap (A \cup B)^c)$$

und damit $A \cup B \in \mathcal{A}$. Aus (2.77) und (2.78) folgt

$$A, B \in \mathcal{A} \qquad \Rightarrow \qquad A \cap B \in \mathcal{A}\,,\; A \setminus B \in \mathcal{A}\,, \tag{2.82}$$

da $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$, $A \setminus B = A \cap B^c$. Falls nun $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$, so folgt aus (2.81)

$$\mu^*(Q \cap (A \cup B)) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap B) \tag{2.83}$$

für alle $Q \subset \Omega$. Sei nun $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweiser disjunkter Elemente von $\mathcal{A}$. Wir wollen zeigen, dass gilt

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}\,, \quad \mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)\,. \tag{2.84}$$

Zunächst ist $\cup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$ wegen (2.78). Aus (2.83) für alle $Q \subset \Omega$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mu^*\left(Q \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mu^*\left(Q \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) + \mu(Q \cap A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(Q \cap A_i)$$

mit Induktion, also

$$\mu^*(Q) = \mu^*\left(Q \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mu^*\left(Q \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(Q \cap A_i) + \mu^*(Q \setminus A)\,,$$

also wegen (2.71), mit $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}\mu^*(Q) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap A_i) + \mu^*(Q \setminus A) &\geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Q \cap A_i\right) + \mu^*(Q \setminus A) &(2.85)\\ &= \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A)\,, &(2.86)\end{aligned}$$

und wegen (2.72) folgt $A \in \mathcal{A}$, und es gilt Gleichheit überall in (2.85). Setzen wir $Q = A$ in (2.85), so ergibt sich

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)\,, \tag{2.87}$$

und die umgekehrte Ungleichung folgt ebenfalls aus (2.71). Damit ist (2.84) bewiesen. Ist nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathcal{A}$, so wird durch

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$$

eine Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen definiert, welche wegen (2.78) und (2.82) ebenfalls in $\mathcal{A}$ liegt, also ist wegen (2.84)

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$$

Zusammen mit (2.76) und (2.77) ergibt sich, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist. Aus der bereits bewiesenen Inklusion $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ folgt nunmehr

$$\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}\,,$$

und wegen (2.84) ist $\mu^*|\mathcal{A}$ ein Maß. □

Theorem 2.22 (Maßerweiterungssatz, Eindeutigkeit)
Sei Ω Menge, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, sei $\mathcal{E}$ schnittstabil. Seien μ_1, μ_2 Maße auf $\sigma(\mathcal{E})$, es gelte

$$\mu_1|\mathcal{E} = \mu_2|\mathcal{E}\,, \tag{2.88}$$

und es gebe eine Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}$ mit $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \Omega$ und $\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mu_1 = \mu_2$ auf $\sigma(\mathcal{E})$.

Beweis: Für $E \in \mathcal{E}$ definieren wir

$$\mathcal{D}_E = \{D :\ D \in \sigma(\mathcal{E}),\, \mu_1(E\cap D) = \mu_2(E \cap D)\}\,. \tag{2.89}$$

Da $\mathcal{E}$ schnittstabil ist, gilt

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_E \subset \sigma(\mathcal{E})\,, \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}. \tag{2.90}$$

Wir zeigen, dass $\mathcal{D}_E$ ein Dynkin-System ist, falls $E \in \mathcal{E}$ und $\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty$. Offensichtlich ist $\Omega \in \mathcal{D}_E$. Ist $D \in \mathcal{D}_E$, so ist $\Omega \setminus D \in \sigma(\mathcal{E})$, also

$$\begin{aligned}\mu_1(E\cap(\Omega\setminus D)) &= \mu_1(E\setminus D) = \mu_1(E) - \mu_1(E\cap D) = \mu_2(E) - \mu_2(E\cap D) = \mu_2(E\setminus D)\\ &= \mu_2(E\cap(\Omega\setminus D))\,,\end{aligned}$$

also ist auch $\Omega \setminus D \in \mathcal{D}_E$. Sei nun $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweiser disjunkter Mengen in $\mathcal{D}_E$, dann ist $\cup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \sigma(\mathcal{E})$, also

$$\begin{aligned}\mu_1\left(E \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n\right) &= \mu_1\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E\cap D_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1(E\cap D_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_2(E\cap D_n)\\ &= \mu_1\left(E \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n\right)\,,\end{aligned}$$

woraus $\cup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}_E$ folgt. $\mathcal{D}_E$ ist also ein Dynkin-System. Aus Satz 2.20 folgt nun, dass

$$\mathcal{D}_E = \sigma(\mathcal{E})\,,$$

also ergibt sich

$$\mu_1(E \cap D) = \mu_2(E \cap D) \tag{2.91}$$

für alle $D \in \sigma(\mathcal{E})$ und alle $E \in \mathcal{E}$ mit $\mu_1(E) < \infty$. Wir definieren

$$F_n = E_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\,.$$

Dann ist $F_n \in \sigma(\mathcal{E})$, $F_n \subset E_n$, die F_n sind paarweise disjunkt, und $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Wegen (2.91) gilt daher für alle $A \in \sigma(\mathcal{E})$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_1(F_n \cap A) = \mu_1(E_n \cap (F_n \cap A)) = \mu_2(E_n \cap (F_n \cap A)) = \mu_2(F_n \cap A)\,,$$

also gilt

$$\begin{aligned}\mu_1(A) &= \mu_1\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \cap A\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1(F_n \cap A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_2(F_n \cap A) = \mu_2\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \cap A\right)\\ &= \mu_2(A)\end{aligned}$$

für alle $A \in \sigma(\mathcal{E})$. □

Folgerung 2.23 *Der n-dimensionale Elementarinhalt*

$$\lambda([a,b)) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \tag{2.92}$$

läßt sich auf genau eine Weise zu einem Maß λ auf der Borel-Algebra $\sigma(\mathcal{O}^n)$ im $\mathbb{R}^n$ fortsetzen. Dieses Maß λ heißt das Lebesgue-Maß (oder das Lebesgue-Borel-Maß).

Beweis: Es gilt $\sigma(\mathcal{O}^n) = \sigma(\mathcal{J}^n)$ nach Satz 2.6. Wegen Satz 2.17 erfüllt λ die Voraussetzungen des Existenzsatzes 2.21 auf dem Ring $\mathcal{R} = \mathcal{F}^n$. Da die Menge $\mathcal{J}^n$ der halboffenen Intervalle schnittstabil ist, folgt die Eindeutigkeit aus Satz 2.22, angewandt auf $\mathcal{E} = \mathcal{J}^n$. □

Das Problem, den Inhalt einer möglichst großen Klasse von Mengen zu definieren, wird vom Maßerweiterungssatz in für viele Zwecke der Analysis befriedigender Weise gelöst.

Definition 2.24 (Meßbare Abbildung)
Seien Ω, Ω' Mengen, seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ σ-Algebren auf Ω bzw. Ω'. Eine Abbildung $T : \Omega \to \Omega'$ heißt messbar, falls $T^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ gilt für alle $A' \in \mathcal{A}'$ (das heißt, falls alle Urbilder von messbaren Mengen wieder messbar sind). (Falls nicht klar ist, welche σ-Algebren gemeint sind, sagen wir, dass T $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbar ist.) □

Lemma 2.25 *Seien Ω, Ω' Mengen, $\mathcal{A}$ σ-Algebra auf Ω, $\mathcal{E}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$ Mengensystem, $\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{E}')$, sei $T : \Omega \to \Omega'$ Abbildung. Gilt $T^{-1}(E') \in \mathcal{A}$ für alle $E' \in \mathcal{E}'$, so ist T messbar.*

Beweis: Nach Übungsaufgabe ist

$$\mathcal{B}' = \{B' : B' \subset \Omega', T^{-1}(B') \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra in Ω'. Aus $\mathcal{E}' \subset \mathcal{B}'$ folgt $\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{E}') \subset \mathcal{B}'$. □

Folgerung 2.26 *Seien (Ω, d), (Ω', d') metrische Räume. Dann ist jede stetige Abbildung $T : \Omega \to \Omega'$ messbar bezüglich der Borel-Algebren (kurz: Borel-messbar).*

Beweis: Ist U' offen in Ω', so ist $T^{-1}(U')$ offen in Ω und damit Borel-messbar. Aus Lemma 2.25 folgt die Behauptung. □

Satz 2.27 (Bildmaß)
Seien Ω, Ω' Mengen, seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ σ-Algebren auf Ω bzw. Ω', sei $T : \Omega \to \Omega'$ messbar. Dann wird für jedes Maß μ auf $\mathcal{A}$ durch

$$\mu'(A') = \mu(T^{-1}(A')) \tag{2.93}$$

ein Maß μ' auf $\mathcal{A}'$ definiert, es heißt das Bild von μ unter der Abbildung T, geschrieben

$$\mu' = T(\mu)\,. \tag{2.94}$$

Beweis: μ' ist wohldefiniert, da $T^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ für alle $A' \in \mathcal{A}'$. Ist $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}'$, so gilt

$$\begin{aligned}\mu'\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n\right) &= \mu\left(T^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^{-1}(A'_n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(T^{-1}(A'_n)) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu'(A'_n)\,.\end{aligned}$$

□

Satz 2.28 *Seien $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ Mengen, seien $\mathcal{A}_i$ σ-Algebren auf Ω_i, seien $T_1 : \Omega_1 \to \Omega_2$ und $T_2 : \Omega_2 \to \Omega_3$ messbar. Dann ist auch $T_2 \circ T_1$ messbar. Ist μ Maß auf $\mathcal{A}_1$, so gilt*

$$(T_2 \circ T_1)(\mu) = T_2(T_1(\mu))\,. \tag{2.95}$$

Beweis: Für alle $A \in \mathcal{A}_3$ ist $T_2^{-1}(A) \in \mathcal{A}_2$, also

$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(A) = T_1^{-1}(T_2^{-1}(A)) \in \mathcal{A}_1\,,$$

also ist $T_2 \circ T_1$ messbar. Für $A \in \mathcal{A}_3$ gilt weiter

$$\begin{aligned}(T_2(T_1(\mu)))(A) &= (T_1(\mu))(T_2^{-1}(A)) = \mu(T_1^{-1}(T_2^{-1}(A))) = \mu((T_2 \circ T_1)^{-1}(A)) \\ &= ((T_2 \circ T_1)(\mu))(A)\,.\end{aligned}$$

□

Das Lebesgue-Maß ist translationsinvariant:

Satz 2.29 *Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $T_a(x) = x + a$. Dann ist*

$$T_a(\lambda) = \lambda \,. \tag{2.96}$$

Beweis: T_a ist stetig, also messbar. Für alle halboffenen Intervalle $[b, c) \in \mathcal{J}^n$ gilt

$$\begin{aligned}(T_a(\lambda))([b,c)) = \lambda(T_a^{-1}([b,c))) = \lambda([b-a, c-a)) &= \prod_{i=1}^{n}((b_i - a_i) - (c_i - a_i)) \\ &= \prod_{i=1}^{n}(b_i - c_i) = \lambda([b,c))\,.\end{aligned}$$

Aus dem Eindeutigkeitssatz 2.22 folgt, dass λ und $T_a(\lambda)$ auf der Borel-Algebra übereinstimmen. □

Wir betrachten nun die Streckung $D_\alpha^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um den Faktor α in die i-te Koordinatenrichtung,

$$D_\alpha^i(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\,. \tag{2.97}$$

Es gilt

$$(D_\alpha^i)^{-1}([a,b)) = [(a_1, \ldots, \frac{a_i}{\alpha}, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, \frac{b_i}{\alpha}, \ldots, b_n))\,, \quad \alpha > 0\,, \tag{2.98}$$

$$(D_\alpha^i)^{-1}([a,b)) = [(a_1, \ldots, \frac{b_i}{\alpha}, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, \frac{a_i}{\alpha}, \ldots, b_n))\,, \quad \alpha < 0\,, \tag{2.99}$$

also

$$(D_\alpha^i(\lambda))([a,b)) = \lambda((D_\alpha^i)^{-1}([a,b))) = \frac{1}{|\alpha|}\prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j) = \frac{1}{|\alpha|}\lambda([a,b))\,. \tag{2.100}$$

Wieder folgt aus dem Eindeutigkeitssatz 2.22, dass

$$D_\alpha^i(\lambda) = \frac{1}{|\alpha|}\lambda \tag{2.101}$$

auf der Borelalgebra gilt. Eine Homothetie

$$H_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,, \quad H_r(x) = rx\,, \quad r \neq 0 \text{ fest,} \tag{2.102}$$

lässt sich darstellen als

$$H_r = D_r^1 \circ D_r^2 \circ \cdots \circ D_r^n\,, \tag{2.103}$$

also folgt, wenn wir Satz 2.28 und (2.101) mehrfach anwenden,

$$H_r(\lambda) = \frac{1}{|r|^n}\lambda\,, \tag{2.104}$$

und insbesondere

$$H_{-1}(\lambda) = \lambda\,, \tag{2.105}$$

das Lebesgue-Maß ist also invariant bezüglich Spiegelung an den Koordinatenachsen (das gilt sogar bezüglich beliebiger orthogonaler Abbildungen, siehe unten Satz 2.32).

Satz 2.30 *Sei μ ein Maß auf der Borelalgebra im $\mathbb{R}^n$, welches translationsinvariant ist, es gelte also*

$$T_a(\mu) = \mu\,, \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}^n. \tag{2.106}$$

Gilt außerdem $\mu([0,1)) < \infty$, so folgt

$$\mu = \alpha\lambda\,, \tag{2.107}$$

wobei $\alpha = \mu([0,1))$.

Beweis: Wir setzen $\alpha = \mu([0,1))$, dann ist $\mu([0,1)) = \alpha\lambda([0,1))$, und wir setzen weiter

$$B_k = [0, (\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}))\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$
$$G_k = \{(a_1, \ldots, a_n) : \; a_i = \frac{m_i}{k}\,, \, m_i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}\}\,.$$

Dann läßt sich für jedes $k \in \mathbb{N}$ das halboffene Intervall $[0,1)$ darstellen als disjunkte Vereinigung

$$[0,1) = \bigcup_{a \in G_k} T_a(B_k)\,, \tag{2.108}$$

und wegen $\mu(T_a(B_k)) = \mu(B_k)$, $\lambda(T_a(B_k)) = \lambda(B_k)$, folgt

$$\mu([0,1)) = k^n \mu(B_k)\,, \quad \lambda([0,1)) = k^n \lambda(B_k)\,, \tag{2.109}$$

also weiter

$$\mu(B_k) = \alpha\lambda(B_k)\,, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{2.110}$$

Sei nun

$$B = [0, (b_1, \ldots, b_n))\,, \quad b_i \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+ \quad \text{für alle } i,$$

dann ist mit geeigneten $k, j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}$

$$B = [0, (\frac{j_1}{k}, \ldots, \frac{j_n}{k}))\,,$$

also lässt sich B darstellen als disjunkte Vereinigung

$$B = \bigcup_{a \in G(b)} T_a(B_k)\,,$$

wobei

$$G(b) = \left\{ \left(\frac{m_1}{k}, \ldots, \frac{m_n}{k} \right) : \; 0 \le m_i < j_i\,, \, m_i \in \mathbb{N} \right\}\,.$$

Es folgt für alle solchen Mengen B

$$\mu(B) = \mu(B_k) \prod_{i=1}^n j_i = \alpha\lambda(B_k) \prod_{i=1}^n j_i = \alpha\lambda(B)\,,$$

und weiter für beliebige $a, b \in \mathbb{Q}^n$

$$\mu([a,b)) = \mu([0, b-a)) = \alpha\lambda([0, b-a)) = \alpha\lambda([a,b))\,. \tag{2.111}$$

Sei nun

$$\mathcal{J}^n_{\text{rat}} = \{[a,b) : \ a,b \in \mathbb{Q}^n\}$$

die Menge aller halboffenen Intervalle, deren Ecken rationale Koordinaten haben. Da sich jedes offene Intervall in $\mathbb{R}^n$, und damit auch jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, als abzählbare Vereinigung solcher halboffener Intervalle schreiben lässt, gilt $\mathcal{O}^n \subset \sigma(\mathcal{J}^n_{\text{rat}}$, also

$$\sigma(\mathcal{J}^n_{\text{rat}}) = \sigma(\mathcal{O}^n)\,.$$

Da das Mengensystem $\mathcal{J}^n_{\text{rat}}$ ebenfalls schnittstabil ist, und da $\mu([0,1)) < \infty$, lässt sich der Eindeutigkeitssatz 2.22 mit $\mathcal{E} = \mathcal{J}^n_{\text{rat}}$ anwenden, und aus (2.111) folgt die Behauptung. □

Folgerung 2.31 *Das Lebesgue-Maß ist das einzige translationsinvariante Maß auf der Borel-Algebra im $\mathbb{R}^n$, welches dem Einheitswürfel $[0,1)$ das Maß 1 zuordnet.* □

Satz 2.32 *Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine orthogonale lineare Abbildung, das heißt, T ist linear und es gilt*

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle x,y\rangle\,, \quad \textit{für alle } x,y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.112}$$

Dann gilt

$$T(\lambda) = \lambda\,. \tag{2.113}$$

Beweis: Nach Folgerung 2.31 genügt es zu zeigen, dass $T(\lambda)$ ein translationsinvariantes Maß ist mit $(T(\lambda))([0,1)) = 1$. Wegen

$$T(x) + a = T(x + T^{-1}(a))$$

für alle $x, a \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$T_a \circ T = T \circ T_b\,, \quad b = T^{-1}(a)\,,$$

also

$$T_a(T(\lambda)) = (T_a \circ T)(\lambda) = (T \circ T_b)(\lambda) = T(T_b(\lambda)) = T(\lambda)\,,$$

da $T_b(\lambda) = \lambda$, also ist $T(\lambda)$ translationsinvariant. Weiter gilt

$$(T(\lambda))([0,1)) = \lambda(T^{-1}([0,1))) < \infty\,,$$

da $T^{-1}([0,1))$ beschränkt ist. Aus Satz 2.30 folgt nun, dass

$$T(\lambda) = \alpha\lambda\,, \quad \alpha = (T(\lambda))([0,1))\,. \tag{2.114}$$

Für die Einheitskugel $B = \{x : x \in \mathbb{R}^n\,,\ \|x\|_2 \le 1\}$ gilt $B = T^{-1}(B)$, da mit T auch T^{-1} orthogonal ist, es folgt also

$$\alpha\lambda(B) = (T(\lambda))(B) = \lambda(T^{-1}(B)) = \lambda(B)\,. \tag{2.115}$$

Hieraus folgt $\alpha = 1$ und damit die Behauptung des Satzes, da $0 < \lambda(B) < \infty$, da B beschränkt ist und

$$[0, (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})) \subset B\,.$$

□

Definition 2.33 (Bewegung)
Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt Bewegung, falls

$$\|Tx - Ty\|_2 = \|x - y\|_2\,, \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n\,. \tag{2.116}$$

Zwei Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ heißen kongruent, falls es eine Bewegung T gibt mit $B = T(A)$.
□

Satz 2.34 *Das Lebesgue-Maß ist bewegungsinvariant, das heißt, es gilt*

$$T(\lambda) = \lambda \tag{2.117}$$

für jede Bewegung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Insbesondere gilt

$$\lambda(A) = \lambda(B)\,, \tag{2.118}$$

falls A und B kongruente Borelmengen sind.

Beweis: Ist T Bewegung mit $T(0) = 0$, so ist T eine orthogonale lineare Abbildung (folgt aus einem Satz der Linearen Algebra, siehe auch Übung). Sind T, T' Bewegungen, so folgt unmittelbar aus der Definition, dass auch $T' \circ T$ eine Bewegung ist. Ist T eine Bewegung und setzen wir $a = -T(0)$, so ist $T_a \circ T$ eine Bewegung mit $(T_a \circ T)(0) = 0$. Hieraus folgt, dass sich jede Bewegung T darstellen lässt als

$$T = T_{T(0)} \circ S\,, \quad S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ orthogonal}\,.$$

Aus Satz 2.32 und der Translationsinvarianz von λ folgt, dass

$$T(\lambda) = T_{T(0)}(\lambda) = \lambda$$

gilt für jede Bewegung T. □

Satz 2.35 *Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und invertierbar. Dann gilt*

$$T(\lambda) = \frac{1}{|\det T|}\lambda\,. \tag{2.119}$$

Beweis: Sei A die zu T gehörende Matrix bezüglich der Standardbasis. Dann gibt es orthogonale Matrizen $U, V \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und eine Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}\{d_1, \dots, d_n\} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, $d_i > 0$, mit

$$A = UDV\,. \tag{2.120}$$

Es handelt sich hier um die sogenannte Singulärwertzerlegung von A, siehe Lineare Algebra oder Numerik. Da D sich als Produkt der Streckungen $D^i_{d_i}$ schreiben lässt, folgt aus (2.101) und Satz 2.32

$$T(\lambda) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n d_i}\lambda\,. \tag{2.121}$$

Andererseits gilt

$$|\det(T)| = |\det(A)| = |\det(U)| \cdot |\det(D)| \cdot |\det V| = |\det(D)| = \prod_{i=1}^n d_i\,.$$

□

Satz 2.36 *Es gibt eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$, die keine Borelmenge ist.*

Beweis: Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$x \sim y \qquad \Leftrightarrow \qquad x - y \in \mathbb{Q}^n \,. \tag{2.122}$$

Wir wählen aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element k, und zwar so, dass $k \in [0,1)$. Wir definieren K als die Menge aller so gewählten Elemente. Dann gilt

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{y \in \mathbb{Q}^n} (y + K)\,, \tag{2.123}$$

denn zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $k \in K$ mit $x \sim k$, also $x - k \in \mathbb{Q}^n$, $x \in (x-k) + K$. Die Vereinigung in (2.123) ist disjunkt: Sind $x, y \in \mathbb{Q}^n$ mit $(x+K) \cap (y+K) \neq \emptyset$, so gibt es $k_1, k_2 \in K$ mit $x + k_1 = y + k_2$, also

$$k_2 - k_1 = x - y \in \mathbb{Q}^n\,,$$

also $k_1 \sim k_2$ und daher $k_1 = k_2$ nach Konstruktion von K, also folgt $x = y$. Wir zeigen nun, dass die Annahme, K sei Borelmenge, zu einem Widerspruch führt. Mit K sind auch alle Mengen $y + K$ Borelmengen, und es gilt, da λ translationsvariant ist,

$$\infty = \lambda(\mathbb{R}^n) = \sum_{y \in \mathbb{Q}^n} \lambda(y + K) = \sum_{y \in \mathbb{Q}^n} \lambda(K)\,,$$

also ist $\lambda(K) > 0$. Andererseits gilt $y + K \subset [0,2)$ für $y \in [0,1)$, da $K \subset [0,1)$ nach Konstruktion, also

$$2^n = \lambda([0,2)) \geq \lambda\left(\bigcup_{y \in \mathbb{Q}^n \cap [0,1)} (y+K)\right) = \sum_{y \in \mathbb{Q}^n \cap [0,1)} \lambda(y+K) = \sum_{y \in \mathbb{Q}^n \cap [0,1)} \lambda(K)\,,$$

also ist $\lambda(K) = 0$, da $\mathbb{Q}^n \cap [0,1)$ eine unendliche Menge ist. Widerspruch. $\square$

3 Das Lebesgue-Integral

Wir wollen Funktionen

$$f : \Omega \to [-\infty, \infty]$$

integrieren bezüglich eines Maßes μ, welches auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ in Ω definiert ist. Wir setzen

$$\overline{\mathcal{J}} = \{[a, b) : \ a \in [-\infty, \infty), \, b \in \mathbb{R}\} = \mathcal{J}^1 \cup \{[-\infty, b) : \ b \in \mathbb{R}\} \, , \tag{3.1}$$

und bezeichnen die von $\overline{\mathcal{J}}$ in $[-\infty, \infty]$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\overline{\mathcal{J}})$ als Borel-Algebra in $[-\infty, \infty]$. Es folgt unmittelbar, dass alle Intervalle der Form

$$[a, b] \, , \quad (a, b] \, , \quad [a, b) \, , \quad (a, b) \, , \qquad a \in [-\infty, \infty) \, , b \in (-\infty, \infty] \, , \tag{3.2}$$

Elemente von $\sigma(\overline{\mathcal{J}})$ sind.

Lemma 3.1 *Für die Borel-Algebra $\sigma(\mathcal{J}^1)$ in $\mathbb{R}$ gilt*

$$\sigma(\mathcal{J}^1) = \{A \cap \mathbb{R} : \ A \in \sigma(\overline{\mathcal{J}})\} \, . \tag{3.3}$$

Beweis: Übung. □

Satz 3.2 *Sei Ω Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in Ω, sei $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist messbar (bezüglich $\mathcal{A}$ und $\sigma(\overline{\mathcal{J}})$).

(ii) $\{\omega : \ f(\omega) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) $\{\omega : \ f(\omega) > \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iv) $\{\omega : \ f(\omega) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

(v) $\{\omega : \ f(\omega) < \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis: "(i)⇒(ii)": $\{\omega : \ f(\omega) \geq \alpha\} = f^{-1}([\alpha, \infty])$.
"(ii)⇒(iii)": $\{\omega : \ f(\omega) > \alpha\} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega : \ f(\omega) \geq \alpha + \frac{1}{n}\}$.
"(iii)⇒(iv)": $\{\omega : \ f(\omega) \leq \alpha\} = \Omega \setminus \{\omega : \ f(\omega) > \alpha\}$.
"(iv)⇒(v)": $\{\omega : \ f(\omega) < \alpha\} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega : \ f(\omega) \leq \alpha - \frac{1}{n}\}$.
"(v)⇒(i)": Wir setzen $\mathcal{E} = \{[-\infty, \alpha) : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$. Nach Lemma 2.25 ist f $\mathcal{A}$-$\sigma(\mathcal{E})$-messbar. Wegen

$$[a, b) = [-\infty, b) \setminus [-\infty, a)$$

ist $\overline{\mathcal{J}} \subset \sigma(\mathcal{E})$, also auch $\sigma(\overline{\mathcal{J}}) \subset \sigma(\mathcal{E})$, und damit f auch $\mathcal{A}$-$\sigma(\overline{\mathcal{J}})$-messbar. □

Notation 3.3 *Für $f, g : \Omega \to [-\infty, \infty]$ definieren wir*

$$\{f \leq g\} = \{\omega : \ \omega \in \Omega, \ f(\omega) \leq g(\omega)\} \, ,$$

analog definieren wir

$$\{f < g\} \, , \quad \{f \geq g\} \, , \quad \{f > g\} \, , \quad \{f = g\} \, , \quad \{f \neq g\} \, .$$

Satz 3.4 *Sei Ω Menge, $\mathcal{A}$ σ-Algebra in Ω, seien $f, g : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar. Dann sind die Mengen*

$$\{f \le g\}\,, \quad \{f < g\}\,, \quad \{f \ge g\}\,, \quad \{f > g\}\,, \quad \{f = g\}\,, \quad \{f \ne g\}\,, \tag{3.4}$$

messbare Teilmengen von Ω.

Beweis: Wegen Satz 3.2 ist

$$\{f < g\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} (\{f < q\} \cap \{q < g\})$$

messbar, für die anderen folgt die Messbarkeit aus

$$\{f > g\} = \{g < f\}\,, \quad \{f \ge g\} = \Omega \setminus \{f < g\}\,, \quad \{f \le g\} = \Omega \setminus \{f > g\}\,,$$
$$\{f = g\} = \{f \le g\} \cap \{g \le f\}\,, \quad \{f \ne g\} = \Omega \setminus \{f = g\}\,.$$

□

Definition 3.5 (Spur-σ-Algebra)
Sei Ω Menge, $\mathcal{A}$ σ-Algebra auf Ω, sei $Q \subset \Omega$. Wir definieren auf Q die Spur-σ-Algebra $\mathcal{A} \cap Q$ durch

$$\mathcal{A} \cap Q = \{A \cap Q : \; A \in \mathcal{A}\}\,. \tag{3.5}$$

□

Dass $\mathcal{A} \cap Q$ eine σ-Algebra auf Q ist, folgt unmittelbar aus den Definitionen.

Satz 3.6 *Sei Ω Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω, $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$, sei $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Mengen in Ω mit*

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n\,. \tag{3.6}$$

Dann gilt: f ist $\mathcal{A}$-messbar genau dann, wenn die Abbildungen

$$f|\Omega_n : \; \Omega_n \to [-\infty, \infty] \tag{3.7}$$

$\mathcal{A} \cap \Omega_n$-messbar sind für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Übung. □

Aus Satz 3.6 erhalten wir: Ist $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ durch eine (endliche oder abzählbar unendliche) Fallunterscheidung definiert, also

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{N} \Omega_n\,, \quad \text{oder} \quad \Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n\,,$$

und

$$f(c) = \begin{cases} f_1(x)\,, & x \in \Omega_1\,, \\ \vdots & \\ f_n(x)\,, & x \in \Omega_n\,, \\ \vdots & \end{cases} \qquad\qquad f_n : \Omega_n \to [-\infty, \infty]\,,$$

so genügt es zum Beweis der Messbarkeit von f festzustellen, dass alle Mengen Ω_n und alle Abbildungen f_n messbar sind.

Wir gehen noch einmal auf die Rechenregeln mit $\pm\infty$ ein.

$$a + \infty = \infty\,, \quad a \in (-\infty, \infty]\,, \tag{3.8}$$

$$a - \infty = -\infty\,, \quad a \in [-\infty, \infty)\,, \tag{3.9}$$

$$a \cdot \infty = \begin{cases} \infty\,, & a \in (0, \infty]\,, \\ 0\,, & a = 0\,, \\ -\infty\,, & a \in [-\infty, 0)\,, \end{cases} \tag{3.10}$$

$$a \cdot (-\infty) = -a \cdot \infty\,, \tag{3.11}$$

$$\infty \cdot a = a \cdot \infty \tag{3.12}$$

Nach wie vor sind $\infty - \infty$ und $-\infty + \infty$ nicht definiert.

Satz 3.7 *Sei Ω Menge, $\mathcal{A}$ σ-Algebra, seien $f, g : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar. Dann sind*

$$f + g : \Omega_+ \to [-\infty, \infty]\,, \quad f - g : \Omega_- \to [-\infty, \infty]\,, \tag{3.13}$$

messbar auf den Definitionsgebieten

$$\Omega_+ = (\{f < \infty\} \cup \{g > -\infty\}) \cap (\{f > -\infty\} \cup \{g < \infty\})\,, \tag{3.14}$$

$$\Omega_- = (\{f < \infty\} \cup \{g < \infty\}) \cap (\{f > -\infty\} \cup \{g > -\infty\})\,. \tag{3.15}$$

Weiter ist $f \cdot g : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar.

Beweis: Wir wenden Satz 3.2 an. Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig, so ist $\alpha - g$ messbar, da

$$\{\alpha - g \geq \beta\} = \{g \leq \alpha - \beta\}\,, \quad \text{für alle } \beta \in \mathbb{R}.$$

Hieraus folgt, dass auch $f + g$ auf Ω_+ messbar ist, da auf Ω_+ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{f + g \geq \alpha\} = \{f \geq \alpha - g\}\,.$$

Wegen $f - g = f + (-g)$ ist $f - g$ auf Ω_- messbar. Die Funktion $f^2 = f \cdot f$ ist messbar, da

$$\{f^2 \geq \alpha\} = \begin{cases} \Omega\,, & \alpha \leq 0\,, \\ \{f \geq \sqrt{\alpha}\} \cup \{f \leq -\sqrt{\alpha}\}\,, & \alpha > 0\,, \end{cases}.$$

Im Spezialfall $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ ist nun fg messbar wegen

$$fg = \frac{1}{4}(f + g)^2 - \frac{1}{4}(f - g)^2\,. \tag{3.16}$$

Für den allgemeinen Fall betrachten wir

$$\Omega_1 = \{fg = \infty\}\,, \quad \Omega_2 = \{fg = -\infty\}\,, \quad \Omega_3 = \{fg = 0\}\,, \quad \Omega_4 = \Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3)\,.$$

Die Ω_i sind messbar, es ist

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= (\{f = \infty\} \cap \{g > 0\}) \cup (\{f = -\infty\} \cap \{g < 0\}) \\ &\quad \cup (\{g = \infty\} \cap \{f > 0\}) \cup (\{g = -\infty\} \cap \{f < 0\})\,, \end{aligned}$$

Ω_2 wird analog zerlegt, und $\Omega_3 = \{f = 0\} \cup \{g = 0\}$. Die Messbarkeit von fg folgt nun aus Satz 3.6 wegen

$$(fg)(\omega) = \begin{cases} \infty\,, & \omega \in \Omega_1\,, \\ -\infty\,, & \omega \in \Omega_2\,, \\ 0\,, & \omega \in \Omega_3\,, \\ (fg)(\omega)\,, & \omega \in \Omega_4\,, \end{cases}$$

da die Messbarkeit von $(fg)|\Omega_4$ in (3.16) gezeigt wurde. □

Satz 3.8 *Sei Ω Menge, $\mathcal{A}$ σ-Algebra auf Ω, seien $f_n : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sind auch die Funktionen*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\,, \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n\,, \quad \limsup_{n\to\infty} f_n\,, \quad \liminf_{n\to\infty} f_n\,, \tag{3.17}$$

messbar.

Beweis: Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \le \alpha\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \le \alpha\}\,,$$

also ist $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \le \alpha\}$ messbar für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und damit auch $(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n) : \Omega \to [-\infty, \infty]$. Aus den Darstellungen

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n = -\sup_{n\in\mathbb{N}} (-f_n)\,,$$

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{m\ge n} f_m \right)\,, \quad \liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{m\ge n} f_m \right)\,,$$

folgt die Messbarkeit der übrigen Funktionen in (3.17). □

Folgerung 3.9 *Sei Ω Menge, $\mathcal{A}$ σ-Algebra auf Ω, seien $f_n : \Omega \to [-\infty, \infty]$ punktweise konvergent gegen $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$,*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,, \quad \textit{für alle } x \in \Omega. \tag{3.18}$$

Dann gilt: Sind alle f_n messbar, so ist auch f messbar.

Beweis: Folgt direkt aus Satz 3.8, da $f = \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$. □

Folgerung 3.10 *Sei Ω Menge, $\mathcal{A}$ σ-Algebra auf Ω, $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar. Dann sind auch der Positivteil f^+ und der Negativteil f^-,*

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = -\min\{f(x), 0\} = (-f)^+(x), \tag{3.19}$$

sowie

$$|f| = f^+ + f^- \tag{3.20}$$

messbar. □

Es ist $f = f^+ - f^-$.

Definition 3.11 (Charakteristische Funktion)
Sei Ω Menge. Für $A \subset \Omega$ definieren wir die charakteristische Funktion $1_A : \Omega \to \mathbb{R}$ von A durch

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases} \tag{3.21}$$

□

Offensichtlich gilt

$$1_A \text{ ist messbar} \qquad \Leftrightarrow \qquad A \text{ ist messbar},$$

sowie die Rechenregeln

$$\begin{aligned} A \subset B \quad &\Leftrightarrow \quad 1_A \le 1_B, \\ 1_{\Omega \setminus A} &= 1 - 1_A, \\ A \cap B = \emptyset \quad &\Leftrightarrow \quad 1_{A \cup B} = 1_A + 1_B, \\ 1_{\cup_{i \in I} A_i} &= \sup_{i \in I} 1_{A_i}, \\ 1_{\cap_{i \in I} A_i} &= \inf_{i \in I} 1_{A_i}. \end{aligned}$$

Definition 3.12 (Einfache Funktion)
Sei Ω Menge. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt einfache Funktion, wenn sie messbar ist und nur endlich viele verschiedene Werte annimmt. Wir setzen

$$E(\Omega) = \{f \,|\, f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \textit{ ist einfache Funktion}\}, \tag{3.22}$$

$$E_+(\Omega) = \{f \,|\, f \in E(\Omega),\ f \ge 0\}. \tag{3.23}$$

□

Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ einfache Funktion mit den voneinander verschiedenen Werten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, so sind die Mengen

$$A_i = \{x : x \in \Omega,\ f(x) = \alpha_i\}, \quad 1 \le i \le n, \tag{3.24}$$

messbar und paarweise disjunkt, und es gilt

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}.$$

Wir beginnen jetzt mit der Definition des Lebesgue-Integrals. Die Grundidee, dargestellt am eindimensionalen Fall

$$\int_a^b f(x)\,dx\,, \quad [a,b]\subset\mathbb{R}\,,$$

ist die folgende: Bisher haben wir den Definitionsbereich von f, nämlich das Intervall $\Omega=[a,b]$, diskretisiert, etwa durch eine Zerlegung $a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$, und f auf den Teilintervallen $[x_i,x_{i+1}]$ approximiert, und zwar für das Regelintegral durch Treppenfunktionen (siehe Analysis 1), oder für das Riemann-Integral (welches wir nicht behandelt haben) durch Ober- und Untersummen. **Im Gegensatz dazu** wird beim Lebesgue-Integral der Wertebereich von f diskretisiert in Werte $\alpha_1,\dots,\alpha_N$, und f wird durch einfache Funktionen approximiert. Die Mengen A_i aus (3.24), welche das Definitionsgebiet unterteilen, können dabei eine sehr komplizierte Struktur haben.

Definition 3.13 (Maßraum)
Sei Ω Menge, $\mathcal{A}$ σ-Algebra auf Ω, μ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Das Tripel $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ heißt Maßraum.
□

Unsere typische Situation ist: $\Omega=\mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}$ ist die Borelalgebra, und μ ist das Lebesgue-Maß λ.

Definition 3.14 (Lebesgue-Integral in $E_+(\Omega)$)
Sei $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ Maßraum, sei $f\in E_+(\Omega)$. Ist

$$f=\sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}\,, \tag{3.25}$$

wobei $\alpha_i\ge 0$ und $A_i\subset\Omega$ messbar für $1\le i\le n$, und die (A_i) paarweise disjunkt sind mit

$$\bigcup_{i=1}^n A_i=\Omega\,, \tag{3.26}$$

so definieren wir das Lebesgue-Integral von f (über Ω bezüglich μ) durch

$$\int_\Omega f\,d\mu=\sum_{i=1}^n \alpha_i\mu(A_i)\,. \tag{3.27}$$

□

Die Darstellung (3.25) ist nicht eindeutig, das Integral in (3.27) hängt aber nicht von der Wahl der Darstellung ab: Ist $(\beta_j,B_j)_{1\le j\le m}$ eine weitere solche Darstellung mit

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}=\sum_{j=1}^m \beta_j 1_{B_j}\,, \tag{3.28}$$

so gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \alpha_i 1_{A_i\cap B_j} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m 1_{A_i\cap B_j} = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i} = \sum_{j=1}^m \beta_j 1_{B_j} = \sum_{j=1}^m \beta_j \sum_{i=1}^n 1_{A_i\cap B_j}\\ &= \sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n \beta_j 1_{A_i\cap B_j}\,.\end{aligned}$$

Da die $A_i \cap B_j$ paarweise disjunkt sind, folgt $\alpha_i = \beta_j$, falls $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, also

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j)\,,$$

also ist das Lebesgue-Integral nichtnegativer einfacher Funktionen wohldefiniert.

Lemma 3.15 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann gelten*

$$\int_\Omega 1_A \, d\mu = \mu(A)\,, \qquad \textit{für alle } A \in \mathcal{A}, \tag{3.29}$$

$$\int_\Omega \alpha f \, d\mu = \alpha \int_\Omega f \, d\mu\,, \qquad \textit{für alle } \alpha \geq 0,\ f \in E_+(\Omega), \tag{3.30}$$

$$\int_\Omega f + g \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu\,, \qquad \textit{für alle } f, g \in E_+(\Omega), \tag{3.31}$$

$$f \leq g \Rightarrow \int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu\,. \tag{3.32}$$

Beweis: Die Eigenschaften (3.29) und (3.30) folgen unmittelbar aus den Definitionen. Seien nun

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}\,, \quad g = \sum_{j=1}^{m} \beta_j 1_{B_j}\,,$$

Darstellungen gemäß Definition 3.14. Zum Beweis von (3.31) bemerken wir, dass

$$f + g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i + \beta_j) 1_{A_i \cap B_j}\,,$$

also

$$\begin{aligned} \int_\Omega f + g \, d\mu &= \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) = \sum_i \alpha_i \mu(A_i) + \sum_j \beta_j \mu(B_j) \\ &= \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu\,. \end{aligned}$$

Zum Beweis von (3.32) stellen wir fest, dass

$$\sum_{i,j} \alpha_i 1_{A_i \cap B_j} = f \leq g = \sum_{i,j} \beta_j 1_{A_i \cap B_j}\,,$$

also $\alpha_i \leq \beta_j$ falls $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ und daher

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{i,j} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \leq \sum_{i,j} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) = \int_\Omega g \, d\mu\,.$$

□

Satz 3.16 *Sei Ω Menge, $\mathcal{A}$ σ-Algebra auf Ω, $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar mit $f \geq 0$. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $E_+(\Omega)$, also $f_n \geq 0$ und $f_n \leq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, mit*

$$f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n\,. \tag{3.33}$$

Beweis: Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird durch Diskretisierung des Bildbereichs $\mathbb{R}_+$ von f konstruiert. Wir definieren $A_{kn} \subset \Omega$ durch

$$A_{kn} = \begin{cases} \{x : k2^{-n} \le f(x) < (k+1)2^{-n}\}\,, & 0 \le k < n2^n\,, \\ \{x : f(x) \ge n\}\,, & k = n2^n\,, \end{cases} \tag{3.34}$$

und f_n durch

$$f_n = \sum_{k=1}^{n2^n} k2^{-n} 1_{A_{kn}}\,, \tag{3.35}$$

also $f_n(x) = k2^{-n}$, falls $x \in A_{kn}$. Dann ist $f_n \le f_{n+1}$ nach Konstruktion, und es gelten

$$f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad f_n(x) = n \quad \text{für alle } n, \tag{3.36}$$

$$f(x) < +\infty \quad \Rightarrow \quad 0 \le f(x) - f_n(x) \le 2^{-n} \quad \text{für alle } n > f(x). \tag{3.37}$$

Hieraus folgt (3.33). □

Definition 3.17 (Lebesgue-Integral nichtnegativer messbarer Funktionen) *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, sei $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar mit $f \ge 0$. Wir definieren das Lebesgue-Integral von f (über Ω bezüglich μ) durch*

$$\int_\Omega f\, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n\, d\mu\,, \tag{3.38}$$

wobei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $E_+(\Omega)$ ist mit

$$f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\,. \tag{3.39}$$

□

Es kann sein, dass das Integral in (3.38) den Wert $+\infty$ hat.

Nach Satz 3.16 gibt es immer eine solche Folge. In Lemma 3.18 unten zeigen wir, dass das Integral nicht von der Wahl der Folge abhängt.

Lemma 3.18 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folge in $E_+(\Omega)$. Dann gilt:*

(i) Ist $g \in E_+(\Omega)$ mit $g \le \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, so ist

$$\int_\Omega g\, d\mu \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n\, d\mu\,. \tag{3.40}$$

(ii) Ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folge in $E_+(\Omega)$, so gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \qquad \Rightarrow \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega g_n\, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n\, d\mu\,. \tag{3.41}$$

Beweis: Sei

$$g = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{A_j}$$

dargestellt gemäß Definition 3.14. Wir wählen $\beta \in (0,1)$ beliebig und setzen

$$B_n = \{f_n \geq \beta g\}\,.$$

Es gilt dann

$$f_n \geq \beta g 1_{B_n} = \beta \sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{A_j} 1_{B_n} = \beta \sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{A_j \cap B_n}\,,$$

also

$$\int_\Omega f_n \, d\mu \geq \int_\Omega \beta \sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{A_j \cap B_n} \, d\mu = \beta \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j \cap B_n)\,. \tag{3.42}$$

Es ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n > \beta g$ auf der Menge $\{g \neq 0\}$, also folgt $B_n \uparrow \Omega$ und weiter $A_j \cap B_n \uparrow A_j$ für alle j, also nach Übungsaufgabe

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_j \cap B_n) = \mu(A_j)\,.$$

Wir bilden in (3.42) auf beiden Seiten das Supremum und erhalten

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n \, d\mu \geq \beta \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j) = \beta \int_\Omega g \, d\mu\,. \tag{3.43}$$

Da (3.43) für jedes $\beta < 1$ gilt, folgt (3.40). Sei nun $\sup_n g_n = \sup_n f_n$. Es ist dann

$$0 \leq g_m \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$$

für alle $m \in \mathbb{N}$, also folgt aus (3.40), angewendet auf g_m, dass

$$\int_\Omega g_m \, d\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n d\mu$$

für alle m, also auch

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \int_\Omega g_m \, d\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n d\mu\,.$$

Vertauschen der Rolle von f_n und g_n liefert (3.41). □

Satz 3.19 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann gilt für alle messbaren Funktionen $f, g : \Omega \to [-\infty, \infty]$ mit $f, g \geq 0$ und alle $\alpha \geq 0$*

$$\int_\Omega \alpha f \, d\mu = \alpha \int_\Omega f \, d\mu\,, \tag{3.44}$$

$$\int_\Omega f + g \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu\,, \tag{3.45}$$

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu\,. \tag{3.46}$$

Beweis: Sei

$$f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \,, \quad g = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n \,,$$

mit Folgen (f_n), (g_n) in $E_+(\Omega)$ gemäß Satz 3.16. Dann gilt $\alpha f = \sup_n \alpha f_n$ für $\alpha \geq 0$, also folgt (3.44) aus

$$\begin{aligned}\int_\Omega \alpha f \, d\mu &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega \alpha f_n \, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha \int_\Omega f_n \, d\mu = \alpha \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n \, d\mu \\ &= \alpha \int_\Omega f \, d\mu \,.\end{aligned}$$

Es gilt weiter

$$f + g = \sup_{n\in\mathbb{N}} (f_n + g_n) \,, \quad f_n + g_n \in E_+(\Omega) \,,$$

also folgt (3.45) aus

$$\begin{aligned}\int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n \, d\mu + \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega g_n \, d\mu = \lim_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n \, d\mu + \lim_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega g_n \, d\mu \\ &= \lim_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_\Omega f_n \, d\mu + \int_\Omega g_n \, d\mu \right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n + g_n \, d\mu = \int_\Omega f + g \, d\mu \,.\end{aligned}$$

Ist $f \leq g$, so ist $f_m \leq g = \sup_n g_n$ für alle $m \in \mathbb{N}$, also folgt aus Lemma 3.18 (i), dass

$$\int_\Omega f_m \, d\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega g_n \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu \,,$$

und hieraus (3.46), indem wir das Supremum über alle $m \in \mathbb{N}$ bilden. □

Definition 3.20 (Lebesgue-Integral messbarer Funktionen)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar. Wir sagen, dass f (Lebesgue-) integrierbar ist (über Ω bezüglich μ), falls

$$\int_\Omega f^+ \, d\mu < \infty \,, \quad \int_\Omega f^- \, d\mu < \infty \,, \tag{3.47}$$

und wir definieren in diesem Fall das Lebesgue-Integral von f durch

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f^+ \, d\mu - \int_\Omega f^- \, d\mu \,. \tag{3.48}$$

□

Wenn nur eines der beiden Integrale in (3.47) den Wert $+\infty$ hat, bleibt die Definition (3.48) sinnvoll, und das Lebesgue-Integral von f hat den Wert $+\infty$ bzw. $-\infty$. (Man bezeichnet f dann allerdings nicht mehr als Lebesgue-integrierbar.)

Lemma 3.21 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist integrierbar.

(ii) f^+ und f^- sind integrierbar.

(iii) Es gibt integrierbare Funktionen $u, v : \Omega \to [0, \infty]$ *mit* $u \geq 0$, $v \geq 0$ *und* $f = u - v$.

(iv) Es gibt eine integrierbare Funktion $g : \Omega \to [0, \infty]$ *mit* $|f| \leq g$.

(v) $|f|$ *ist integrierbar.*

Beweis: Die Äquivalenz von (i) und (ii) ist in Definition 3.20 enthalten.
"(ii)⇒(iii)": Wähle $u = f^+$, $v = f^-$. Da f^+ und f^- nie gleichzeitig den Wert $+\infty$ annehmen, ist $f^+ - f^-$ überall definiert.
"(iii)⇒(iv)": Nach Satz 3.19 ist mit u und v auch $g = u + v$ integrierbar, und es folgt

$$|f| = |u - v| \leq |u| + |v| = g\,.$$

"(iv)⇒(v)": Es ist $(|f|)^+ = |f|$, $(|f|)^- = 0$, also nach Satz 3.19

$$0 \leq \int_\Omega |f|\, d\mu \leq \int_\Omega g\, d\mu < \infty\,.$$

"(v)⇒(ii)": Es gilt $0 \leq f^+ \leq |f|$, $0 \leq f^- \leq |f|$, also

$$\int_\Omega f^+\, d\mu \leq \int_\Omega |f|\, d\mu < \infty\,, \qquad \int_\Omega f^-\, d\mu \leq \int_\Omega |f|\, d\mu < \infty\,.$$

□

Satz 3.22 *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *Maßraum, seien* $f, g : \Omega \to [-\infty, \infty]$ *integrierbar. Dann gelten*

$$\int_\Omega \alpha f\, d\mu = \alpha \int_\Omega f\, d\mu\,, \quad \textit{für alle } \alpha \in \mathbb{R}\,, \tag{3.49}$$

und, falls $f + g$ *auf ganz* Ω *definiert ist,*

$$\int_\Omega f + g\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu + \int_\Omega g\, d\mu\,, \tag{3.50}$$

und weiter

$$f \leq g \qquad \Rightarrow \qquad \int_\Omega f\, d\mu \leq \int_\Omega g\, d\mu\,, \tag{3.51}$$

$$\left| \int_\Omega f\, d\mu \right| \leq \int_\Omega |f|\, d\mu\,. \tag{3.52}$$

Beweis: Folgt aus den entsprechenden Aussagen für nichtnegative Funktionen in Satz 3.19 und Lemma 3.21. Wegen

$$\begin{aligned} (\alpha f)^+ &= \alpha f^+\,, \quad (\alpha f)^- = \alpha f^-\,, \qquad \text{falls } \alpha \geq 0, \\ (\alpha f)^+ &= |\alpha| f^-\,, \quad (\alpha f)^- = |\alpha| f^+\,, \qquad \text{falls } \alpha < 0. \end{aligned}$$

gilt (3.49). Setzen wir $u = f^+ + g^+$ und $v = f^- + g^-$, so sind u und v integrierbar, nichtnegativ, und es gilt nirgends $u(x) = v(x) = \infty$ (andernfalls wäre $(f + g)(x)$ nicht definiert). Es ist dann $f + g$ integrierbar und

$$u - v = f + g = (f + g)^+ - (f + g)^-\,,$$

also
$$\int_\Omega u\, d\mu + \int_\Omega (f+g)^-\, d\mu = \int_\Omega v\, d\mu + \int_\Omega (f+g)^+\, d\mu\,,$$
und weiter
$$\begin{aligned}\int_\Omega f+g\, d\mu &= \int_\Omega (f+g)^+\, d\mu - \int_\Omega (f+g)^-\, d\mu = \int_\Omega u\, d\mu - \int_\Omega v\, d\mu \\ &= \int_\Omega f^+\, d\mu + \int_\Omega g^+\, d\mu - \left(\int_\Omega f^-\, d\mu + \int_\Omega g^-\, d\mu\right) = \int_\Omega f\, d\mu + \int_\Omega g\, d\mu\,.\end{aligned}$$
Ist $f \le g$, so sind $f^+ \le g^+$ und $f^- \ge g^-$, also
$$\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega f^+\, d\mu - \int_\Omega f^-\, d\mu \le \int_\Omega g^+\, d\mu - \int_\Omega g^-\, d\mu = \int_\Omega g\, d\mu\,.$$
Wegen $f \le |f|$ folgt
$$\int_\Omega f\, d\mu \le \int_\Omega |f|\, d\mu\,,$$
wegen $-f \le |f|$ folgt
$$-\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega -f\, d\mu \le \int_\Omega |f|\, d\mu\,,$$
also gilt (3.52). □

Definition 3.23 (Integral über Teilmengen) *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *Maßraum, sei* $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ *messbar, sei* $A \subset \Omega$ *messbar. Wir definieren*
$$\int_A f\, d\mu = \int_\Omega f\, 1_A\, d\mu\,, \tag{3.53}$$
falls die rechte Seite definiert ist, das heißt, falls entweder $f \cdot 1_A \ge 0$ *oder* $f \cdot 1_A$ *integrierbar ist.*

Lemma 3.24 *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *Maßraum, sei* $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ *messbar, seien* $A, B \subset \Omega$ *messbar. Dann gilt, falls* $f \ge 0$ *oder* f *integrierbar ist,*
$$\int_{A\cup B} f\, d\mu + \int_{A\cap B} f\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_B f\, d\mu\,. \tag{3.54}$$

Beweis: Folgt aus Satz 3.22 wegen
$$1_{A\cup B} + 1_{A\cap B} = 1_A + 1_B\,.$$
□

4 Konvergenzsätze und L^p-Räume

Wir beschäftigen uns jetzt mit zwei immer wiederkehrenden Themen der Analysis, nämlich

- Vertauschbarkeit eines Funktionals (hier: das Integral) mit Grenzprozessen,
- Ungleichungen und Abschätzungen für Funktionen.

Satz 4.1 (Beppo-Levi) *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, seien $f_n : \Omega \to [-\infty, \infty]$ eine monoton wachsende Folge nichtnegativer messbarer Funktionen. Dann gilt*

$$\int_\Omega \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n \, d\mu \,. \tag{4.1}$$

Beweis: Wir setzen $f = \sup_n f_n$. Wegen $f_n \le f$ folgt

$$\int_\Omega f_n \, d\mu \le \int_\Omega f \, d\mu \,, \qquad \text{also} \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n \, d\mu \le \int_\Omega f \, d\mu \,.$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung wählen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Folge $(f_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ von Funktionen in $E_+(\Omega)$ mit

$$f_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_{nk} \,.$$

Das ist möglich nach Satz 3.16. Wir setzen

$$g_n = \sup_{j\le n} f_{jn} \,.$$

Dann ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine monoton wachsende Folge in $E_+(\Omega)$, und für alle $m, k \in \mathbb{N}$ gilt mit $n = \max\{m, k\}$

$$f_{mk} \le f_{mn} \le g_n = \sup_{j\le n} f_{jn} \le \sup_{j\le n} f_j = f_n \,,$$

also

$$f = \sup_{m\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\mathbb{N}} f_{mk} \le \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n \,,$$

also nach Definition und Monotonie des Lebesgue-Integrals

$$\int_\Omega f \, d\mu \le \int_\Omega \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n \, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega g_n \, d\mu \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n \, d\mu \,.$$

$\square$

Folgerung 4.2 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, seien $f_k : \Omega \to [-\infty, \infty]$ nichtnegative messbare Funktionen. Dann wird durch*

$$f(x) = \sum_{k=1}^\infty f_k(x) \tag{4.2}$$

eine messbare Funktion $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ definiert, und es gilt

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_\Omega f_k \, d\mu \,. \tag{4.3}$$

Beweis: Wir wenden Satz 4.1 an auf

$$f = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n\,, \quad g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k\,.$$

□

Definition 4.3 (p-Halbnorm)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, sei $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar, sei $p \in [1, \infty)$. Wir definieren $N_p(f) \in [0, \infty]$ durch

$$N_p(f) = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.4}$$

und

$$\mathcal{L}^p(\Omega; \mu) = \{ f \,|\, f : \Omega \to [-\infty, \infty] \text{ messbar, } N_p(f) < \infty \}\,. \tag{4.5}$$

Im Spezialfall $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega; \lambda)\,, \tag{4.6}$$

wobei λ wieder das Lebesgue-Maß bezeichnet. □

Nach Definition 3.20 gilt offenbar

$$f \in \mathcal{L}^p(\Omega; \mu) \qquad \Leftrightarrow \qquad |f|^p \text{ ist integrierbar (über } \Omega \text{ bezüglich } \mu),$$

und aus der Definition von $N_p(f)$ folgt unmittelbar

$$N_p(\alpha f) = |\alpha| N_p(f) \tag{4.7}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle messbaren Funktionen $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$, also gilt

$$f \in \mathcal{L}^p(\Omega; \mu) \quad \Rightarrow \quad \alpha f \in \mathcal{L}^p(\Omega; \mu) \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}. \tag{4.8}$$

Es ist aber möglich, dass $f \neq 0$, aber $N_p(f) = 0$, etwa für

$$f = 1_{\{0\}}\,, \quad f(x) = \begin{cases} 1\,, & x = 0\,, \\ 0\,, & x \neq 0\,. \end{cases}$$

Definition 4.4 (Nullmenge)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Ein $N \in \mathcal{A}$ heißt μ-Nullmenge, falls $\mu(N) = 0$. Wir sagen, dass eine Eigenschaft (E) von Punkten $x \in \Omega$ fast überall (genauer: μ-fast überall) auf Ω gilt, falls es eine μ-Nullmenge N gibt mit

$$\{x : x \in \Omega, \text{ (E) gilt nicht in } x\} \subset N\,. \tag{4.9}$$

□

Zwei Funktionen $f, g : \Omega \to [-\infty, \infty]$ heißen also **fast überall gleich**, wenn es eine Nullmenge N gibt mit

$$\{x : f(x) \neq g(x)\} \subset N\,.$$

Satz 4.5 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, sei $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar und $f \geq 0$. Dann gilt*

$$\int_\Omega f \, d\mu = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f = 0 \quad \mu\text{-fast überall.} \tag{4.10}$$

Beweis: Wir setzen $N = \{f \neq 0\}$. N ist messbar.
"$\Rightarrow$": Wir setzen

$$A_n = \{f \geq \frac{1}{n}\}.$$

Dann gilt $A_n \uparrow N$ und

$$0 \leq \frac{1}{n} 1_{A_n} \leq f,$$

also

$$0 = \int_\Omega f \, d\mu \geq \int_\Omega \frac{1}{n} 1_{A_n} \, d\mu = \frac{1}{n} \mu(A_n) \geq 0,$$

also $\mu(A_n) = 0$ und $\mu(N) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.
"$\Leftarrow$": Es ist $\mu(N) = 0$, da $f = 0$ μ-fast überall. Wir setzen $f_n = n 1_N$, dann ist

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \begin{cases} \infty, & f(x) \neq 0, \\ 0, & f(x) = 0. \end{cases}$$

Es folgt $0 \leq f \leq \sup_n f_n$ und daher nach Satz 4.1

$$0 \leq \int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n \, d\mu = 0,$$

da

$$\int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega n 1_N \, d\mu = n\mu(N) = 0.$$

□

Satz 4.6 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, seien $f, g : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar, sei $1 \leq p < \infty$. Dann gilt:*

(i) Ist N eine μ-Nullmenge, so ist $f 1_N$ integrierbar und

$$\int_N f \, d\mu = 0. \tag{4.11}$$

(ii) Ist $f = g$ μ-fast überall, und ist $f \geq 0$ oder f integrierbar, so ist

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu. \tag{4.12}$$

(iii) Ist $f \in L^p(\Omega; \mu)$, so ist $\mu(\{|f| = \infty\}) = 0$.

(iv) Ist $|f| \leq g$ μ-fast überall und g integrierbar, so ist auch f integrierbar und

$$\int_\Omega |f| \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu. \tag{4.13}$$

(v) Sind $M, N \in \mathcal{A}$, und ist $M \triangle N = (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$ eine μ-Nullmenge, so ist

$$\int_M f \, d\mu = \int_N f \, d\mu \,, \tag{4.14}$$

falls $f \geq 0$ oder f integrierbar ist.

Beweis: "(i)": Sei N Nullmenge. Ist $f \geq 0$, so ist $f 1_N = 0$ μ-fast überall, also folgt (4.11) aus Satz 4.5. Ist f beliebig, so ist $f 1_N = f^+ 1_N - f^- 1_N$, und die Behauptung folgt aus dem eben Bewiesenen.
"(ii)": Sei zunächst $f \geq 0$. Nach Voraussetzung ist $N = \{f \neq g\}$ eine μ-Nullmenge und $\{g^- \neq 0\} \subset N$, also

$$\int_\Omega g^- \, d\mu = 0 \,, \quad \int_N g^+ \, d\mu = 0 \,,$$
$$\int_\Omega g^+ \, d\mu = \int_{\{f=g\}} g^+ \, d\mu = \int_{\{f=g\}} f \, d\mu + \int_N f \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu \,,$$

also ist $\int g \, d\mu$ wohldefiniert, und (4.12) gilt. Sei nun f integrierbar. Es ist $f^+ = g^+$ und $f^- = g^-$ μ-fast überall, also ist

$$\int_\Omega f^\pm \, d\mu = \int_\Omega g^\pm \, d\mu \,,$$

und es folgt die Behauptung.
"(iii)": Sei $N = \{|f| = \infty\}$. Dann ist

$$0 \leq n 1_N \leq |f|^p$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also gilt

$$0 \leq n\mu(N) = \int_\Omega n 1_N \, d\mu \leq \int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty \,,$$

woraus $\mu(N) = 0$ folgt.
"(iv)": Ist $|f| \leq g$ μ-fast überall, so ist $\max\{|f|, g\} = g$ μ-fast überall und daher

$$\int_\Omega |f| \, d\mu \leq \int_\Omega \max\{|f|, g\} \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu < \infty \,.$$

"(v)": Übung. □

Satz 4.7 (Höldersche Ungleichung für Funktionen)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, seien $f, g : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar, seien $p, q > 1$ mit $1/p + 1/q = 1$. Dann gilt

$$\int_\Omega |fg| \, d\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \,. \tag{4.15}$$

Beweis: Falls $N_p(f) = \infty$ oder $N_q(g) = \infty$, so hat die rechte Seite in (4.15) den Wert unendlich. Ist $N_p(f) = 0$, so ist nach Satz 4.5 auch $|f|^p = 0$ μ-fast überall. Also gilt: Ist $N_p(f) = 0$ oder $N_q(g) = 0$, so ist $fg = 0$ μ-fast überall und damit die linke Seite in (4.15) gleich Null. Wir betrachten nun den Fall $0 < N_p(f), N_q(g) < \infty$. Sei $x \in \Omega$ beliebig. Aus der Youngschen Ungleichung

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

im Reellen folgt

$$\frac{|f(x)g(x)|}{N_p(f)N_q(g)} \le \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{N_p(f)^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{N_q(g)^q}\,.$$

Integration über Ω ergibt

$$\frac{\int_\Omega |fg|\,d\mu}{N_p(f)N_q(g)} \le \frac{1}{p}\frac{N_p(f)^p}{N_p(f)^p} + \frac{1}{q}\frac{N_q(g)^q}{N_q(g)^q} = 1\,.$$

□

Satz 4.8 (Minkowskische Ungleichung)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, seien $f, g : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar, sei $f + g$ auf ganz Ω definiert und $1 \le p < \infty$. Dann gilt

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_\Omega |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (4.16)$$

Beweis: Wegen $|f+g| \le |f| + |g|$, also

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_\Omega (|f|+|g|)^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

können wir o.B.d.A. voraussetzen, dass $f \ge 0$ und $g \ge 0$, und dass ausserdem f^p und g^p integrierbar sind (andernfalls hat die rechte Seite in (4.16) den Wert unendlich). Dann ist auch $(f+g)^p$ integrierbar wegen

$$(f+g)^p \le (2\max\{f,g\})^p \le 2^p \max\{f^p, g^p\} \le 2^p(f^p + g^p)\,.$$

Mit

$$q = \frac{p}{p-1}\,, \qquad \text{also } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,,$$

ergibt sich unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f+g)^p\,d\mu &= \int_\Omega f(f+g)^{p-1}\,d\mu + \int_\Omega g(f+g)^{p-1}\,d\mu \\ &\le \left(\int_\Omega f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega (f+g)^{q(p-1)}\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_\Omega g^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega (f+g)^{q(p-1)}\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_\Omega (f+g)^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\int_\Omega f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega g^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right], \qquad (4.17)\end{aligned}$$

also, da $f+g$ integrierbar ist,

$$\left(\int_\Omega (f+g)^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega (f+g)^p \, d\mu\right)^{1-\frac{1}{q}} \le \left(\int_\Omega f^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega g^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} .$$

□

Für N_p gilt also auch die Dreiecksungleichung

$$N_p(f+g) \le N_p(f) N_p(g) , \tag{4.18}$$

aber es kann sein, dass $N_p(f) = 0$ ist, obwohl $f \neq 0$, und außerdem ist $\mathcal{L}^p(\Omega;\mu)$ kein Vektorraum über $\mathbb{R}$, da die Addition nicht immer definiert ist. Beide Nachteile werden beseitigt, indem man durch Bildung geeigneter Äquivalenzklassen zu einem anderen Raum, nämlich dem Raum $L^p(\Omega;\mu)$ übergeht.

Wir behandeln nun im einzelnen die Konstruktion von $L^p(\Omega;\mu)$. Zunächst definieren wir auf $\mathcal{L}^p(\Omega;\mu)$ eine Relation $\sim$ durch

$$f \sim g \qquad \Leftrightarrow \qquad f = g \quad \mu\text{-fast überall.}$$

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation: Reflexivität und Symmetrie sind klar. Gilt $f \sim g$ und $g \sim h$, so ist

$$\{f \neq h\} \subset (\{f \neq g\} \cup \{g \neq h\}) ,$$

also ist $\{f \neq h\}$ eine μ-Nullmenge und damit $f \sim h$. Wir definieren

$$L^p(\Omega;\mu) = \mathcal{L}^p(\Omega;\mu)/ \sim , \tag{4.19}$$

das heißt, die Elemente von $L^p(\Omega;\mu)$ sind Äquivalenzklassen von μ-fast überall gleichen Funktionen. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$L^p(\Omega) = L^p(\Omega;\lambda) . \tag{4.20}$$

Zur Illustration der Äquivalenzklassenbildung betrachten wir etwa eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$, dann ist $1_N = 0$ fast überall, also $[1_N] = [0]$ in $L^p(\Omega)$. Auch für

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \infty , & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 , & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

gilt $[f] = [0]$. Die Äquivalenzrelation $\sim$ ist wegen

$$f \sim g \, , \, \alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \{\alpha f \neq \alpha g\} \subset \{f \neq g\} \quad \Rightarrow \quad \alpha f \sim \alpha g$$

mit der Skalarmultiplikation verträglich. Dasselbe gilt für die Addition: Sind $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$, und sind $f_1 + f_2$ und $g_1 + g_2$ definiert, so gilt

$$\{(f_1 + f_2) \neq (g_1 + g_2)\} \subset (\{f_1 \neq g_1\} \cup \{f_2 \neq g_2\}) ,$$

also $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$. Da $\mu(\{|f| = \infty\}) = 0$ gilt für alle $f \in \mathcal{L}^p(\Omega;\mu)$, gibt es in jeder Äquivalenzklasse $[f]$ eine Funktion $g \in \mathcal{L}^p(\Omega;\mu)$, welche nur endliche Werte hat.

Hieraus und aus der Verträglichkeit von $\sim$ mit Addition und Skalarmultiplikation folgt, dass $L^p(\Omega;\mu)$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ wird, wenn wir definieren

$$\alpha[f] = [\alpha f]\,, \quad [f] + [g] = [f+g]\,.$$

Nach Satz 4.6 gilt außerdem

$$f \sim g \qquad \Rightarrow \qquad \int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega g\,d\mu\,.$$

Wir können daher für $f \in \mathcal{L}^p(\Omega;\mu)$ definieren

$$\|[f]\|_p = N_p(f) = \left(\int_\Omega |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\,. \tag{4.21}$$

Hierdurch erhalten wir eine Norm auf $L^p(\Omega;\mu)$, da gilt $\|[f]\|_p \ge 0$,

$$\|\alpha[f]\|_p = \|[\alpha f]\|_p = N_p(\alpha f) = |\alpha| N_p(f) = |\alpha|\|[f]\|_p\,,$$

analog mit der Minkowskischen Ungleichung

$$\|[f]+[g]\|_p \le \|[f]\|_p + \|[g]\|_p\,,$$

und

$$\begin{aligned} \|[f]\|_p = 0 \quad &\Rightarrow \quad N_p(f) = 0 \quad \Rightarrow \quad |f| = 0 \quad \mu\text{-fast überall} \\ &\Rightarrow \quad f \sim 0 \quad \Rightarrow \quad [f] = [0]\,. \end{aligned}$$

Als Ergebnis dieser Überlegungen erhalten wir

Satz 4.9 *Der Raum $L^p(\Omega;\mu)$ ist ein normierter Vektorraum.* □

Normalerweise schreibt man für eine Funktion $f : \Omega \to [-\infty,\infty]$

"$f \in L^p(\Omega;\mu)$"

anstatt, was eigentlich korrekt wäre, "$[f] \in L^p(\Omega;\mu)$". Man muss dann allerdings beachten, dass die Elemente von $L^p(\Omega;\mu)$ nur bis auf eine Menge vom Maß 0 wohldefiniert sind. Beispielsweise bedeutet "$f = g$ in $L^p(\Omega;\mu)$", dass $f(x) = g(x)$ gilt für fast alle $x \in \Omega$.

Geht man aus von einer stetigen Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, so ist klar, was die Aussage

"f ist stetig auf Ω" (4.22)

bedeutet. Geht man aus von $f \in L^p(\Omega;\mu)$, so ist (4.22) zunächst nicht sinnvoll, da jede Äquivalenzklasse in $L^p(\Omega;\mu)$ unstetige Funktionen enthält. Gemeint ist mit (4.22) die Aussage

"Die Äquivalenzklasse $[f]$ von f enthält eine stetige Funktion".

Wir halten noch einmal explizit fest, dass gilt

$$f \in \mathcal{L}^p(\Omega;\mu) \qquad \Rightarrow \qquad \mu(\{|f| = \infty\}) = 0\,.$$

Hierdurch erklärt sich die oft anzutreffende Schreibweise

$$L^p(\Omega;\mu) = \{f \,|\, f : \Omega \to \mathbb{R},\ \int_\Omega |f|^p\,d\mu < \infty\}\,. \tag{4.23}$$

Definition 4.10 (Wesentliches Supremum)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Für $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ definieren wir das wesentliche Supremum durch

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} f(x) = \inf\{M : M \in [-\infty, \infty],\, f \leq M \ \mu\text{-fast überall}\} \tag{4.24}$$

und den Raum $\mathcal{L}^\infty(\Omega; \mu)$ der messbaren, wesentlich beschränkten Funktionen durch

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega; \mu) = \{f : f : \Omega \to [-\infty, \infty] \text{ messbar}, \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty\} \tag{4.25}$$

sowie

$$L^\infty(\Omega; \mu) = \mathcal{L}^\infty(\Omega; \mu)/\sim, \tag{4.26}$$

wobei $\sim$ dieselbe Äquivalenzrelation darstellt wie in der Definition von $L^p(\Omega; \mu)$ für $p < \infty$.
□

Satz 4.11 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann ist $L^\infty(\Omega; \mu)$ versehen mit*

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| \tag{4.27}$$

ein normierter Vektorraum.

Beweis: Übung. □

Beispiel: Für die durch

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^x \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{N}, \\ 0, & x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{2}, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = 1, \quad \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|_\infty = 0.$$

Wir beschäftigen uns nun mit der Konvergenz von Folgen in $L^p(\Omega; \mu)$. Wie in jedem normierten Raum ist in $L^p(\Omega; \mu)$ die Normkonvergenz definiert durch

$$f_n \to f \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0, \tag{4.28}$$

also

$$f_n \to f \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu = 0. \tag{4.29}$$

Wir sagen, dass f_n gegen f in der L^p-Norm konvergiert.

Aus der Analysis 1 kennen wir den Begriff der punktweisen Konvergenz von Funktionenfolgen,

$$f_n \to f \quad \text{punktweise} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Die punktweise Konvergenz ist im $\mathcal{L}^p(\Omega; \mu)$ definiert, ist aber zunächst nicht mit der Äquivalenzrelation $\sim$ verträglich. Der für die Analysis in L^p-Räumen wesentliche Konvergenzbegriff ist der folgende. Wir sagen, dass f_n gegen f punktweise μ-fast überall konvergiert, falls

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{für } \mu\text{-fast alle } x \in \Omega \tag{4.30}$$

gilt. Dieser Konvergenzbegriff ist mit $\sim$ verträglich und daher in $L^p(\Omega; \mu)$ wohldefiniert (Übung).

Lemma 4.12 *Seien $f, g \in L^p(\Omega; \mu)$, $1 \le p \le \infty$. Ist $|f| \le |g|$ μ-fast überall, so gilt*

$$\|f\|_p \le \|g\|_p \,. \tag{4.31}$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus der Definition für $p = \infty$, für $p < \infty$ gilt

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p \, d\mu \le \int_\Omega |g|^p \, d\mu = \|g\|_p^p \,.$$

□

Satz 4.13 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, sei $A \subset \Omega$ messbar. Dann wird durch*

$$I_A(f) = \int_A f \, d\mu \tag{4.32}$$

ein lineares stetiges Funktional $I_A : (L^1(\Omega; \mu), \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$ definiert mit

$$|I_A(f)| \le \|f\|_1 \,. \tag{4.33}$$

Insbesondere gilt: Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $L^1(\Omega; \mu)$ und $f \in L^1(\Omega; \mu)$, so gilt

$$f_n \to f \quad \text{in der } L^1\text{-Norm} \qquad \Rightarrow \qquad \int_A f_n \, d\mu \to \int_A f \, d\mu \,. \tag{4.34}$$

Beweis: Es ist

$$I_A(f) = \int_\Omega 1_A f \, d\mu \,,$$

also ist I_A linear, und

$$|I_A(f)| \le \int_\Omega |1_A f| \, d\mu = \|1_A f\|_1 \le \|f\|_1$$

wegen Lemma 4.12. Nach Satz 4.23 (Analysis 2) folgt hieraus auch die Stetigkeit von I_A.
□

Satz 4.14 *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $L^p(\Omega; \mu)$ mit $f_n \to f \in L^p(\Omega; \mu)$ in der L^p-Norm. Dann gilt*

$$\int_A |f_n|^p \, d\mu \to \int_A |f|^p \, d\mu \,. \tag{4.35}$$

Beweis: Es ist (umgekehrte Dreiecksungleichung und Lemma 4.12)

$$|\, \|1_A f_n\|_p - \|1_A f\|_p \,| \le \|1_A (f_n - f)\|_p \le \|f_n - f\|_p \,,$$

also

$$\int_A |f_n|^p \, d\mu = \|1_A f_n\|_p^p \to \|1_A f\|_p^p = \int_A |f|^p \, d\mu \,.$$

□

Satz 4.15 (Lemma von Fatou)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, seien $f_n : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar und nichtnegativ. Dann gilt

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu \,. \tag{4.36}$$

Beweis: Wir setzen

$$g_n = \inf_{m \ge n} f_m \,,$$

dann ist

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n \,,$$

und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton wachsende Folge nichtnegativer Funktionen. Da $g_n \le f_m$ für $m \ge n$, folgt

$$\int_\Omega g_n \, d\mu \le \int_\Omega f_m \, d\mu \,, \quad \text{für alle } m \ge n,$$

also

$$\int_\Omega g_n \, d\mu \le \inf_{m\ge n} \int_\Omega f_m \, d\mu \,,$$

also mit dem Satz von Beppo-Levi

$$\begin{aligned}\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu &= \int_\Omega \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n \, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega g_n \, d\mu \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{m\ge n} \int_\Omega f_m \, d\mu \right) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu \,.\end{aligned}$$

□

Satz 4.16 *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $L^p(\Omega;\mu)$, $1 \le p < \infty$, es gelte $f_n \to f \in L^p(\Omega;\mu)$ punktweise μ-fast überall. Dann gilt*

$$f_n \to f \quad \textit{in der } L^p\textit{-Norm} \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_\Omega |f_n|^p \, d\mu \to \int_\Omega |f|^p \, d\mu \,. \tag{4.37}$$

Beweis: Die Implikation "⇒" ist bereits in Satz 4.14 enthalten. Wir zeigen "⇐". Es gilt

$$|f_n - f|^p \le 2^p(|f_n|^p + |f|^p) \,,$$

sowie punktweise μ-fast überall

$$2^{p+1}|f|^p = \lim_{n\to\infty} \left[2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p\right] \,.$$

Aus dem Lemma von Fatou folgt nun

$$\begin{aligned}\int_\Omega 2^{p+1}|f|^p \, d\mu &\le \liminf_{n\to\infty} \left[\int_\Omega 2^p|f_n|^p \, d\mu + \int_\Omega 2^p|f|^p \, d\mu - \int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu \right] \\ &= 2^{p+1} \int_\Omega |f|^p \, d\mu + \liminf_{n\to\infty} \left[- \int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu \right] \,,\end{aligned}$$

also

$$\liminf_{n\to\infty} \left[-\int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu \right] \geq 0 \,. \tag{4.38}$$

Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gilt aber

$$a_n \leq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \,. \tag{4.39}$$

Es folgt also

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p^p$$

und damit die Behauptung. □

Die Gültigkeit des folgenden Satzes ist einer der Gründe, weshalb das Lebesgue-Integral in der Analysis sehr nützlich ist.

Satz 4.17 (Satz von Lebesgue)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $L^p(\Omega;\mu)$, $1 \leq p < \infty$, es gelte

(a) f_n ist punktweise μ-fast überall konvergent,

(b) es gibt ein $g \in L^p(\Omega;\mu)$ mit

$$|f_n| \leq g \quad \mu\text{-fast überall für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{4.40}$$

Dann gibt es ein $f \in L^p(\Omega;\mu)$ mit $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-fast überall, und f_n konvergiert gegen f in der L^p-Norm, also

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu = 0 \,. \tag{4.41}$$

Beweis: Wir wählen Repräsentanten $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^p(\Omega;\mu)$ von f_n und eine μ-Nullmenge N, so dass $\lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x)$ existiert für alle $x \in \Omega \setminus N$. Wir setzen

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x) \,, & x \in \Omega \setminus N \,, \\ 0 \,, & x \in N \,. \end{cases} \tag{4.42}$$

Dann ist $\tilde{f}$ messbar, und es gilt $|\tilde{f}| \leq g$ μ-fast überall, also ist $\tilde{f} \in \mathcal{L}^p(\Omega;\mu)$. Wir definieren

$$f = [\tilde{f}] \,. \tag{4.43}$$

Dann ist $f \in L^p(\Omega;\mu)$ und $f_n \to f$ μ-fast überall. (f ist von der Wahl von $\tilde{f}_n$ und N unabhängig.) Es gilt nun μ-fast überall

$$0 \leq |f_n - f|^p \leq (|f| + g)^p =: h \,, \quad |f_n - f|^p \to 0 \,,$$

also folgt aus dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned} \int_\Omega h \, d\mu &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} (h - |f_n - f|^p) \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega (h - |f_n - f|^p) \, d\mu \\ &= \int_\Omega h \, d\mu + \liminf_{n\to\infty} \left[-\int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu \right] \,, \end{aligned}$$

also, da $\int_\Omega h\, d\mu < \infty$,

$$\liminf_{n\to\infty} \left[-\int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu \right] \geq 0\,,$$

und daraus $\|f_n - f\|_p \to 0$ wie im Beweis von Satz 4.16. □

Läßt man im Satz von Lebesgue die Voraussetzung b) (Existenz einer integrierbaren Majorante) weg, so gilt die Aussage des Satzes im allgemeinen nicht. Beispiel:

$$\Omega = \mathbb{R}\,, \quad f_n = 1_{[n,n+1]}\,.$$

Hier gilt

$$f_n \to f = 0 \quad \text{punktweise, aber} \qquad \int_{\mathbb{R}} |f_n|^p d\lambda = 1\,.$$

Folgerung 4.18 *Es seien die Voraussetzungen von Satz 4.17 erfüllt mit $p = 1$. Dann gilt*

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu\,. \tag{4.44}$$

Beweis: Aus Satz 4.17 folgt

$$\left| \int_\Omega f_n \, d\mu - \int_\Omega f \, d\mu \right| \leq \int_\Omega |f_n - f| \, d\mu \to 0\,.$$

□

Satz 4.19 *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $(L^p(\Omega;\mu), \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$. Dann gibt es ein $f \in L^p(\Omega;\mu)$ mit $f_n \to f$ in der L^p-Norm, und es gibt eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_{n_k} \to f$ μ-fast überall.*

Beweis: Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, können wir eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ finden mit

$$\|f_{n_k} - f\|_p \leq 2^{-k}\,, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{4.45}$$

Wir definieren

$$g_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\,, \quad g = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^n |g_k|\,.$$

Dann gilt mit dem Satz von Beppo-Levi

$$\begin{aligned} \|g\|_p &= \left(\int_\Omega \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^n |g_k| \right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^n |g_k| \right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=1}^n |g_k| \right\|_p \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^n \|g_k\|_p \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^n 2^{-k} = 1\,, \end{aligned}$$

also ist $g \in L^p(\Omega;\mu)$ und daher nach Satz 4.6

$$\mu(\{g = \infty\}) = 0\,,$$

also ist $\sum_{k=1}^\infty |g_k(x)|$ und damit auch $\sum_{k=1}^\infty g_k(x)$ konvergent für μ-fast alle $x \in \Omega$. Wegen

$$f_{n_m}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{m-1} g_k(x)$$

ist auch $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall konvergent, und für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f_{n_m}| \le |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{m-1} |g_k| \le |f_{n_1}| + g \in L^p(\Omega;\mu)\,.$$

Wir können daher den Satz von Lebesgue auf die Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ anwenden und erhalten

$$f_{n_k} \to f \in L^p(\Omega;\mu) \quad \mu\text{-fast überall}, \quad \lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|_p = 0\,.$$

Die Cauchyfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat also eine in der L^p-Norm gegen f konvergente Teilfolge, also gilt $f_n \to f$ in der L^p-Norm. □

Aus den Voraussetzungen von Satz 4.19 folgt im allgemeinen nicht, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise μ-fast überall konvergiert.

Beispiel 4.20
Sei $\Omega = [0,1]$, $\mu = \lambda$. Für

$$n = 2^k + m\,, \quad k \in \mathbb{N},\ 0 \le m < 2^k\,,$$

setzen wir

$$f_n = 1_{A_n}\,, \quad A_n = [m2^{-k}, (m+1)2^{-k})\,.$$

Dann ist

$$\int_\Omega |f_n|^p \, d\lambda = \lambda(A_n) = 2^{-k}\,,$$

also $\|f_n\|_p \to 0$ und damit $f_n \to 0$ in der L^p-Norm, also ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge im $L^p([0,1])$, aber $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert für kein $x \in [0,1)$. □

Satz 4.21 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann ist $L^p(\Omega;\mu)$ für $1 \le p \le \infty$ ein Banachraum und für $p = 2$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f g \, d\mu\,. \tag{4.46}$$

Beweis: Für $1 \le p < \infty$ folgt die Vollständigkeit von $L^p(\Omega;\mu)$ unmittelbar aus Satz 4.19. Für $p = \infty$ Übungsaufgabe. Wir zeigen, dass $L^2(\Omega;\mu)$ ein Hilbertraum ist. Aus der Hölderschen Ungleichung für $p = q = 2$ folgt für alle $f, g \in L^2(\Omega,\mu)$, dass

$$\int_\Omega |fg| \, d\mu \le \left(\int_\Omega |f|^2 \, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |g|^2 \, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2 \|g\|_2\,,$$

also ist $fg \in L^1(\Omega;\mu)$ und damit $\langle f, g\rangle$ auf $L^2(\Omega;\mu)$ definiert. Ferner gilt

$$\langle f, f\rangle = \int_\Omega |f|^2 \, d\mu = \|f\|_2^2 \ge 0\,,$$

und $\langle f, f\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0$. Aus der Linearität des Integrals folgt, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bilinear ist; die Symmetrie ist klar. □

Satz 4.22 *Sei (X,d) metrischer Raum, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ Abbildung, $x_0 \in X$. Es sei*

$$\omega \mapsto f(x,\omega) \quad \textit{integrierbar für alle } x \in X, \tag{4.47}$$

$$x \mapsto f(x,\omega) \quad \textit{stetig im Punkt } x_0 \textit{ für alle } \omega \in \Omega, \tag{4.48}$$

und es gebe ein $h \in \mathcal{L}^1(\Omega;\mu)$ mit

$$|f(x,\omega)| \le h(\omega), \quad \textit{für alle } x \in X,\ \omega \in \Omega. \tag{4.49}$$

Dann wird durch

$$g(x) = \int_\Omega f(x,\omega)\, d\mu(\omega) \tag{4.50}$$

eine Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ definiert, welche stetig in x_0 ist. Ist für alle $\omega \in \Omega$ die durch $x \mapsto f(x,\omega)$ definierte Funktion in X stetig, so ist g in X stetig.

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_n \to x_0$. Wir definieren

$$f_n : \Omega \to \mathbb{R}, \quad f_n(\omega) = f(x_n, \omega).$$

Dann gilt $|f_n| \le h$ für alle n und

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f_0(\omega), \quad \text{für alle } \omega \in \Omega.$$

Aus Folgerung 4.18 folgt

$$g(x_n) = \int_\Omega f_n\, d\mu \to \int_\Omega f_0\, d\mu = g(x_0).$$

□

Satz 4.23 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f : U \times \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,\ldots,n\}$. Seien die durch $\omega \mapsto f(x,\omega)$ definierten Funktionen integrierbar für alle $x \in U$, es existiere die partielle Ableitung (nach x_i) $\partial_i f(x,\omega)$ für alle $x \in U$ und alle $\omega \in \Omega$, und es gebe ein $h \in \mathcal{L}^1(\Omega;\mu)$ mit*

$$|\partial_i f(x,\omega)| \le h(\omega), \quad \textit{für alle } x \in U,\ \omega \in \Omega. \tag{4.51}$$

Dann gilt für $g : U \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \int_\Omega f(x,\omega)\, d\mu(\omega), \tag{4.52}$$

dass $\partial_i g(x)$ existiert für alle $x \in U$, und

$$\partial_i g(x) = \int_\Omega \partial_i f(x,\omega)\, d\mu(\omega). \tag{4.53}$$

Beweis: Sei $x \in U$, sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$ mit $h_n \to 0$ und $h_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$d_n(\omega) = \frac{f(x + h_n e_i, \omega) - f(x,\omega)}{h_n}, \tag{4.54}$$

wobei $e_i \in \mathbb{R}^n$ der i-te Einheitsvektor ist. Dann gilt für geeignete Zwischenstellen $\xi_n(\omega) \in [x, x + h_n e_i]$,

$$|d_n(\omega)| = \left| \frac{\partial_i f(\xi_n(\omega), \omega) h_n}{h_n} \right| \leq h(\omega) \,, \tag{4.55}$$

für alle $\omega \in \Omega$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Aus dem Satz von Lebesgue folgt nun, da die Folge (h_n) beliebig gewählt war,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \partial_i f(x, \omega)\, d\mu(\omega) &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega d_n(\omega)\, d\mu(\omega) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h_n} \left[\int_\Omega f(x + h_n e_i, \omega)\, d\mu(\omega) - \int_\Omega f(x, \omega)\, d\mu(\omega) \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h_n} (g(x + h_n e_i) - g(x)) = \partial_i g(x) \,.
\end{aligned}$$

□

5 Mehrfachintegrale, Satz von Fubini

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der Frage, wie sich Integrale über Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ zurückführen lassen auf Integrale über Intervalle im $\mathbb{R}$.

Bevor wir damit beginnen, halten wir zunächst fest, dass jede Regelfunktion (siehe Analysis 1) auch Lebesgue-integrierbar ist.

Satz 5.1 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann ist f Lebesgue-integrierbar auf $[a, b]$, und das Regelintegral von f ist gleich dem Lebesgue-Integral.*

Beweis: Folgt aus dem Satz von Lebesgue, da f gleichmäßiger Limes einer Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen auf $[a, b]$ ist, und es eine Konstante C gibt mit $\|\varphi_n\|_\infty \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Damit stehen uns alle Regeln, die wir in Analysis 1 und 2 zur Berechnung von Integralen auf kompakten Intervallen kennengelernt haben, weiterhin zur Verfügung. Da das Lebesgue-Integral für eine größere Klasse von Funktionen definiert ist als das Regelintegral, ist es auch nicht überraschend, dass diese Regeln (partielle Integration, Substitutionsregel usw.) für das Lebesgue-Integral mit schwächeren Voraussetzungen an die beteiligten Funktionen auskommen als für das Regelintegral. Wir stellen diese Sachverhalte aber nicht im Einzelnen dar.

Wir schreiben daher in Zukunft auch für das Lebesgue-Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{statt} \qquad \int_{[a,b]} f\,d\lambda\,. \tag{5.1}$$

Da $\lambda(\{a\}) = \lambda(\{b\}) = 0$, gilt

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_{(a,b]} f\,d\lambda = \int_{[a,b)} f\,d\lambda = \int_{(a,b)} f\,d\lambda\,. \tag{5.2}$$

Der Zusammenhang zwischen Lebesgue-Integral und uneigentlichem Regelintegral ist etwas komplizierter.

Satz 5.2 *Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ (dabei sind $a = -\infty$ und $b = +\infty$ zugelassen), $f : (a, b) \to [-\infty, \infty]$ messbar. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1((a, b))$ genau dann, wenn*

$$\sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}\\ a<x<y<b}} \int_x^y |f(t)|\,dt < \infty\,, \tag{5.3}$$

und es gilt in diesem Fall

$$\int_a^b f(t) = \lim_{x\downarrow a}\lim_{y\uparrow b} \int_x^y f(t)\,dt = \lim_{y\uparrow b}\lim_{x\downarrow a} \int_x^y f(t)\,dt\,. \tag{5.4}$$

Beweis: Übung. □

Als Beispiel betrachten wir

$$f(t) = t^r, \quad r > 0.$$

Für $(a,b) = (0,1)$, $x \in (0,1)$, $x \downarrow 0$ gilt

$$\begin{aligned}
r > -1: &\int_x^1 t^r\,dt = \frac{1}{r+1}(1 - x^{r+1}) \le \frac{1}{r+1}, \quad \text{also } f \in \mathcal{L}^1((0,1)), \\
r = -1: &\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = -\ln x \to \infty, \quad \text{also } f \notin \mathcal{L}^1((0,1)), \\
r < -1: &\int_x^1 t^r\,dt = \frac{1}{r+1}(1 - x^{r+1}) \to \infty, \quad \text{also } f \notin \mathcal{L}^1((0,1)).
\end{aligned}$$

Analoge Betrachtungen lassen sich für $(a,b) = (1,\infty)$ anstellen mit dem Ergebnis

$$f \in \mathcal{L}^1((1,\infty)), \quad r < -1,$$

und $f \notin \mathcal{L}^1((1,\infty))$ andernfalls. Als weiteres Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f : (1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

Aus der Analysis 1 wissen wir, dass

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{5.5}$$

existiert und endlich ist, aber

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x \left|\frac{\sin t}{t}\right|\,dt = \infty,$$

also $f \notin \mathcal{L}^1((1,\infty))$, obwohl der Limes in (5.5) existiert.

Wir beschäftigen uns nun mit der Frage, wie wir höherdimensionale Integrale auf niederdimensionale (und damit letztlich auf eindimensionale) Integrale zurückführen können. Dies geschieht mit dem Prinzip von Cavalieri (für die Berechnung von Inhalten) und mit dem Satz von Fubini (für die Berechnung allgemeiner Integrale). Um die verschiedenen Dimensionen auseinanderzuhalten, schreiben wir im folgenden

$$\lambda^n$$

für das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$. Messbarkeit bedeutet für den Rest dieses Abschnittes immer Borel-Messbarkeit.

Wir erläutern zunächst das Prinzip von Cavalieri an einem Rechteck in der Ebene. Sei

$$\begin{aligned}
Q &= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2, \\
Q_\xi &= \{\eta : \eta \in \mathbb{R}, (\xi, \eta) \in Q\}, \quad \xi \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\lambda^1(Q_\xi) = \begin{cases} b_2 - a_2, & \xi \in [a_1, b_1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir definieren $s_Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$s_Q(\xi) = \lambda^1(Q_\xi)\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\lambda^2(Q) &= (b_2 - a_2)(b_1 - a_1) = (b_2 - a_2) \int_{\mathbb{R}} 1_{[a_1,b_1]}\, d\lambda^1 = \int_{\mathbb{R}} s_Q\, d\lambda^1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^1(Q_\xi) d\lambda^1(\xi)\,.\end{aligned}$$

Wir erhalten also den Flächeninhalt von Q, indem wir die Längen der senkrechten Schnitte in Abhängigkeit von ξ bestimmen und anschließend nach ξ integrieren.

Notation 5.3
Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$, $n = m + l$. Wir zerlegen $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$ und definieren für $\xi \in \mathbb{R}^m$

$$Q_\xi = \{\eta :\ \eta \in \mathbb{R}^l,\ (\xi, \eta) \in Q\}\,.$$

Satz 5.4 (Prinzip von Cavalieri)
Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $n = m + l$. Dann gilt

(i) *Q_ξ ist messbar für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.*

(ii) *Die durch*
$$s_Q(\xi) = \lambda^l(Q_\xi) \tag{5.6}$$
definierte Funktion $s_Q : \mathbb{R}^m \to [0, \infty]$ ist messbar.

(iii) *Es gilt*
$$\lambda^n(Q) = \int_{\mathbb{R}^m} s_Q\, d\lambda^m = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^l(Q_\xi)\, d\lambda^m(\xi)\,. \tag{5.7}$$

Beweis: Für $\xi \in \mathbb{R}^m$ definieren wir das Mengensystem $\mathcal{A}_\xi \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\mathcal{A}_\xi = \{A :\ A \subset \mathbb{R}^n,\ A_\xi \text{ ist messbar im } \mathbb{R}^l\}\,. \tag{5.8}$$

Dann gilt $\mathcal{J}^n \subset \mathcal{A}_\xi$, da $I_\xi \in \mathcal{J}^l$ falls $I \in \mathcal{J}^n$. Außerdem ist $\mathcal{A}_\xi$ eine σ-Algebra, da

$$\begin{gathered}\mathbb{R}^n_\xi = \mathbb{R}^l\,, \\ (\mathbb{R}^n \setminus A)_\xi = \{\eta :\ \eta \in \mathbb{R}^l,\ (\xi, \eta) \notin A\} = \mathbb{R}^l \setminus A_\xi\,,\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)_\xi &= \left\{\eta :\ \eta \in \mathbb{R}^l,\ (\xi, \eta) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\eta :\ \eta \in \mathbb{R}^l,\ (\xi, \eta) \in A_n\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n)_\xi\,.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\mathcal{J}^n \subset \sigma(\mathcal{J}^n) \subset \mathcal{A}_\xi\,,$$

und damit ist jedes messbare $Q \subset \mathbb{R}^n$ Element von $\mathcal{A}_\xi$, also gilt (i). Wir definieren nun für messbares $\tilde{A} \subset \mathbb{R}^l$

$$\mu_k(\tilde{A}) = \lambda^l(\tilde{A} \cap \{\eta : \eta \in \mathbb{R}^l, \|\eta\|_2 \le k\}), \tag{5.9}$$

dann ist μ_k ein endliches Maß auf $\mathbb{R}^l$ und

$$s_Q(\xi) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \mu_k(Q_\xi). \tag{5.10}$$

Zum Beweis von (ii) genügt es daher, die folgende Hilfsbehauptung zu zeigen:

> Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ messbar, und ist μ ein endliches Maß auf der Borelalgebra im $\mathbb{R}^l$, so ist die durch $g_Q(\xi) = \mu(Q_\xi)$ definierte Abbildung $g_Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ messbar.

Hierzu definieren wir das Mengensystem $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{D} = \{D : D \subset \mathbb{R}^n, D \text{ messbar}, g_D \text{ messbar}\}. \tag{5.11}$$

Wir zeigen, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System ist. Es ist

$$g_{\mathbb{R}^n}(\xi) = \mu(\mathbb{R}^n_\xi) = \mu(\mathbb{R}^l),$$

also ist $g_{\mathbb{R}^n}$ konstant und damit messbar. Ist $D \in \mathcal{D}$, so ist

$$g_{\mathbb{R}^n \setminus D}(\xi) = \mu((\mathbb{R}^n \setminus D)_\xi) = \mu(\mathbb{R}^l \setminus D_\xi) = \mu(\mathbb{R}^l) - \mu(D_\xi) = \mu(\mathbb{R}^l) - g_D(\xi),$$

also ist auch $g_{\mathbb{R}^n \setminus D}$ messbar und damit $\mathbb{R}^n \setminus D \in \mathcal{D}$. Sei nun $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ disjunkte Folge in $\mathcal{D}$, $D = \cup_{k\in\mathbb{N}} D_k$, dann gilt

$$g_D(\xi) = \mu(D_\xi) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (D_k)_\xi\right) = \sum_{k=1}^\infty \mu((D_k)_\xi) = \sum_{k=1}^\infty g_{D_k}(\xi),$$

also ist g_D messbar und damit $D \in \mathcal{D}$. Damit ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System. Es gilt weiter

$$\mathcal{J}^n \subset \mathcal{D},$$

da jedes $I \in \mathcal{J}^n$ die Form $I = I_1 \times I_2$ mit $I_1 \in \mathcal{J}^m$ und $I_2 \in \mathcal{J}^l$ hat und wegen

$$\mu(I_\xi) = \mu(I_2) 1_{I_1}(\xi)$$

die Abbildung g_I messbar ist. Da $\mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{J}^n)$ gilt nach Definition von $\mathcal{D}$, folgt

$$\mathcal{J}^n \subset \mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{J}^n).$$

Aus Satz 2.20 folgt nun, dass

$$\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{J}^n).$$

Also ist g_Q messbar für jedes messbare $Q \subset \mathbb{R}^n$ und damit die Hilfsbehauptung (und damit auch (ii)) bewiesen. Wir kommen nun zu (iii). Für messbares $Q \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\nu(Q) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^l(Q_\xi)\, d\lambda^m(\xi). \tag{5.12}$$

Wegen des Eindeutigkeitssatzes 2.22 genügt es zu zeigen, dass ν ein Maß ist und dass

$$\nu(I) = \lambda^n(I)\,, \quad \text{für alle } I \in \mathcal{J}^n. \tag{5.13}$$

Zunächst ist $\nu(\emptyset) = 0$, da $\emptyset_\xi = \emptyset$. Sei $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweiser disjunkter messbarer Mengen, dann ist auch $((Q_k)_\xi)_{k\in\mathbb{N}}$ disjunkt für alle $\xi \in \mathbb{R}^m$ und also

$$\begin{aligned}\nu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k\right) &= \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^l\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (Q_k)_\xi\right) d\lambda^m(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^l((Q_k)_\xi)\, d\lambda^m(\xi) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^l((Q_k)_\xi)\, d\lambda^m(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(Q_k)\,.\end{aligned}$$

Also ist ν Maß. Sei nun $I = [a,b) \in \mathcal{J}^n$, $I = I_1 \times I_2$, $I_1 \in \mathcal{J}^m$, $I_2 \in \mathcal{J}^l$, dann ist

$$\lambda^n(I) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = \lambda^m(I_1)\cdot\lambda^l(I_2)\,,$$

und

$$\nu(I) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^l(I_\xi)\, d\lambda^m(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^l(I_2) 1_{I_1}(\xi)\, d\lambda^m(\xi) = \lambda^m(I_1)\cdot\lambda^l(I_2)\,.$$

Damit ist (5.13) bewiesen. □

Folgerung 5.5 *Seien $n = m + l$, seien $Q_1 \subset \mathbb{R}^m$, $Q_2 \subset \mathbb{R}^l$ und $Q = Q_1 \times Q_2 \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Dann ist*

$$\lambda^n(Q) = \lambda^m(Q_1) \times \lambda^l(Q_2)\,. \tag{5.14}$$

Beweis: Folgt aus (5.7), da $\lambda^l(Q_\xi) = \lambda^l(Q_2)1_{Q_1}(\xi)$. □

Folgerung 5.6 *Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $n = m + l$, sei*

$$Q^\eta = \{\xi : \xi \in \mathbb{R}^m,\ (\xi,\eta) \in Q\}\,. \tag{5.15}$$

Dann gelten die Behauptungen von Satz 5.4 in analoger Weise, wobei (5.7) ersetzt wird durch

$$\lambda^n(Q) = \int_{\mathbb{R}^l} \lambda^m(Q^\eta)\, d\lambda^l(\eta)\,. \tag{5.16}$$

Beweis: Die Abbildung

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,, \quad T(\xi,\eta) = (\eta,\xi)\,,$$

ist orthogonal. Es gilt, da λ^n invariant ist unter orthogonalen Abbildungen,

$$\lambda^n(Q) = \lambda^n(TQ) = \int_{\mathbb{R}^l} \lambda^m((TQ)_\eta)\, d\lambda^l(\eta) = \int_{\mathbb{R}^l} \lambda^m((Q)^\eta)\, d\lambda^l(\eta)\,.$$

□

Beispiel 5.7 (Volumenberechnung mit dem Cavalieri-Prinzip)
Wir betrachten eine Reihe von Beispielen.

(i) Zylinder: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ messbar, $h \geq 0$,

$$Z = \Omega \times [0,h] \subset \mathbb{R}^n .$$

Dann ist

$$\lambda^n(Z) = \lambda^{n-1}(\Omega) \cdot \lambda^1([0,h]) = h\lambda^{n-1}(\Omega) .$$

(ii) Parallelotop: Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis des $\mathbb{R}^n$,

$$P = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i : \lambda_i \in [0,1],\, 1 \leq i \leq n\} .$$

Es ist

$$P = T([0,1]^n) ,$$

wobei T die durch $T(e_i) = v_i$ eindeutig festgelegte lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist (e_i Einheitsvektoren), und

$$1 = \lambda^n([0,1]^n) = \lambda^n(T^{-1}(P)) = (T(\lambda^n))(P) = \frac{1}{|\det T|}\lambda^n(P) ,$$

also gilt

$$\lambda^n(P) = |\det T| = |\det A| ,$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ die Matrix mit den Spalten $v_1, \dots, v_n$ ist.

(iii) Homothetie: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $r > 0$. Mit $T(x) = rx$ gilt

$$\lambda^n(r\Omega) = |\det T|(T(\lambda^n))(r\Omega) = |\det T|\lambda^n(\Omega) = r^n\lambda^n(\Omega) .$$

(iv) Kegel: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ messbar, sei $h \geq 0$. Dann ist

$$C = \{((1-\lambda)x, \lambda h) : \lambda \in [0,1],\, x \in \Omega\}$$

ein Kegel mit Basis Ω und Höhe h (die Spitze liegt in $(0, \dots, 0, h)$). Es ist

$$\begin{aligned}
\lambda^n(C) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^{n-1}(C^t)\, d\lambda^1(t) = \int_{[0,h]} \lambda^{n-1}((1-\frac{t}{h})\Omega)\, dt \\
&= \int_0^h (1-\frac{t}{h})^{n-1}\lambda^{n-1}(\Omega)\, dt = -\frac{h}{n}(1-\frac{t}{h})^n\Big|_0^h \lambda^{n-1}(\Omega) = \\
&= \frac{h}{n}\lambda^{n-1}(\Omega) .
\end{aligned}$$

(v) Fläche zwischen zwei Kurven: Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ messbar, $[a,b] \subset \mathbb{R}$, es gelte $f \leq g$. Wir setzen

$$M = \{(x,y) : x \in [a,b],\, f(x) \leq y \leq g(x)\} .$$

Es ist

$$\lambda^2(M) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^1(M_x)\, d\lambda^1(x) = \int_{[a,b]} \lambda^1([f(x), g(x)])\, dx = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx .$$

(vi) Rotationskörper: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ messbar, $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f \geq 0$. Wir setzen

$$\Omega = \{(x,y,z) : \, x \in [a,b], \, y^2 + z^2 \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^3 .$$

Es ist

$$\lambda^3(\Omega) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2(\Omega_x) \, d\lambda^1(x) = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx . \tag{5.17}$$

(vii) Kugel mit Radius R:

$$K = \{(x,y,z) : \, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} .$$

Wir wenden (5.17) an mit $[a,b] = [-R,R]$, $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, dann ist

$$\lambda^3(K) = \pi \int_{-R}^{R} R^2 - x^2 \, dx = \frac{4}{3}\pi R^3 .$$

(viii) Simplex: Seien $v_0, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$,

$$S = \{\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i : \, \lambda_i \geq 0, \, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1\} . \tag{5.18}$$

Wir betrachten zunächst das Simplex S_n, definiert durch $v_0 = 0$, $v_i = e_i$, also

$$S_n = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) : \lambda_i \geq 0, \, \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1\} .$$

Es gilt

$$S_n = \{((1-\lambda_n)\tilde{\lambda}_1, \ldots, (1-\lambda_n)\tilde{\lambda}_{n-1}, \lambda_n) : , \tilde{\lambda}_i \geq 0, \, \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\lambda}_i \leq 1, \, \lambda_n \in [0,1]\} ,$$

das heißt, S_n ist Kegel mit der Basis S_{n-1} und der Höhe 1, also folgt aus (iv)

$$\lambda^n(S_n) = \frac{1}{n}\lambda^{n-1}(S_{n-1}) ,$$

und wegen $\lambda^1(S_1) = \lambda^1([0,1]) = 1$ gilt

$$\lambda^n(S_n) = \frac{1}{n!} .$$

Das Simplex S in (5.18) läßt sich darstellen als $S = T(S_n)$, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $Tx = Ax + v_0$, und $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ hat die Spalten $v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0$. Es folgt

$$\lambda^n(S) = |\det A| \lambda^n(S_n) = \frac{1}{n!}|\det A| \tag{5.19}$$

falls $\det A \neq 0$; falls $\det A = 0$, so liegt S in einer Hyperebene, also $\lambda^n(S) = 0$ und (5.19) gilt auch in diesem Fall.

□

Mit dem Prinzip von Cavalieri können wir in Spezialfällen bereits Mehrfachintegrale berechnen. Ist etwa

$$f = 1_Q \,, \quad Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \,,$$

so ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda^2 = \lambda^2(Q) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^1(Q_\xi) \, d\lambda^1(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{Q_\xi}(\eta) \, d\lambda^1(\eta) \right) \, d\lambda^1(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(\xi, \eta) \, d\eta \right) \, d\xi \,. \end{aligned}$$

Satz 5.8 (Satz von Tonelli)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ messbar, $n = m + l$. Dann ist die durch

$$f_\xi(\eta) = f(\xi, \eta) \tag{5.20}$$

definierte Funktion $f_\xi : \mathbb{R}^l \to [0, \infty]$ messbar für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, ebenso ist die durch

$$g(\xi) = \int_{\mathbb{R}^l} f_\xi(\eta) \, d\lambda^l(\eta) \tag{5.21}$$

definierte Funktion $g : \mathbb{R}^m \to [0, \infty]$ messbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^l} f(\xi, \eta) \, d\lambda^l(\eta) \right) \, d\lambda^m(\xi) \,. \tag{5.22}$$

Beweis: Wir betrachten zuerst den Spezialfall $f = 1_Q$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Dann ist

$$f_\xi(\eta) = 1_Q(\xi, \eta) = 1_{Q_\xi}(\eta) \,,$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} 1_Q \, d\lambda^n = \lambda^n(Q) \,, \quad \int_{\mathbb{R}^l} 1_{Q_\xi}(\eta) \, d\lambda^l(\eta) = \lambda^l(Q_\xi) \,,$$

und alle Behauptungen folgen aus Satz 5.4. Sei nun $f \in E_+(\mathbb{R}^n)$,

$$f = \sum_{i=1}^k \alpha_i 1_{Q_i} \,, \quad Q_i \subset \mathbb{R}^n \text{ messbar.}$$

Dann ist

$$f_\xi(\eta) = \sum_{i=1}^k \alpha_i 1_{Q_i}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^k \alpha_i 1_{(Q_i)_\xi}(\eta) \,,$$

also ist nach dem eben Bewiesenen f_ξ messbar, und

$$g(\xi) = \int_{\mathbb{R}^l} \sum_{i=1}^k \alpha_i 1_{(Q_i)_\xi}(\eta) \, d\lambda^l(\eta) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \int_{\mathbb{R}^l} 1_{(Q_i)_\xi}(\eta) \, d\lambda^l(\eta) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda^l((Q_i)_\xi) \,,$$

und damit auch g messbar. Aus

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda^n = \sum_{i=1}^k \alpha_i \int_{\mathbb{R}^n} 1_{Q_i} \, d\lambda^n &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^l} 1_{(Q_i)_\xi} \, d\lambda^l \right) \, d\lambda^m(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^l} \sum_{i=1}^k \alpha_i (1_{Q_i})_\xi \, d\lambda^l \right) \, d\lambda^m(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^l} f_\xi(\eta) \, d\lambda^l(\eta) \right) \, d\lambda^m(\xi) \end{aligned}$$

folgt (5.22). Sei schließlich $f \geq 0$ beliebig, sei

$$f = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k \,,$$

mit einer monoton wachsenden Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $E_+(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$f_\xi = \sup_{k \in \mathbb{N}} (f_k)_\xi \,,$$

also f_ξ messbar, und aus dem Satz von Beppo-Levi folgt

$$g(\xi) = \int_{\mathbb{R}^l} f_\xi(\eta)\, d\lambda^l(\eta) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^l} (f_k)_\xi(\eta)\, d\lambda^l(\eta)$$

also g messbar. Es folgt weiter

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda^n &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\, d\lambda^n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^l} (f_k)_\xi(\eta)\, d\lambda^l(\eta)\, d\lambda^m(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^l} (f_k)_\xi(\eta)\, d\lambda^l(\eta)\, d\lambda^m(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^l} f_\xi(\eta)\, d\lambda^l(\eta)\, d\lambda^m(\xi)\,.\end{aligned}$$

□

Ganz analog zeigt man, dass aus Folgerung 5.6 folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(\xi,\eta)\, d\lambda^m(\xi) \right) d\lambda^l(\eta)\,. \tag{5.23}$$

Folgerung 5.9 (Satz von Fubini)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ messbar, $n = m + l$. Dann sind äquivalent:

(i) $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Es ist

$$\int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^l} |f(\xi,\eta)|\, d\lambda^l(\eta)\, d\lambda^m(\xi) < \infty\,. \tag{5.24}$$

(iii) Es ist

$$\int_{\mathbb{R}^l} \int_{\mathbb{R}^m} |f(\xi,\eta)|\, d\lambda^m(\xi)\, d\lambda^l(\eta) < \infty\,. \tag{5.25}$$

Falls $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ so gilt

$$\int_{\mathbb{R}^l} |f(\xi,\eta)|\, d\lambda^l(\eta) < \infty\,, \quad \textit{für fast alle } \xi \in \mathbb{R}^m, \tag{5.26}$$

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(\xi,\eta)|\, d\lambda^m(\xi) < \infty\,, \quad \textit{für fast alle } \eta \in \mathbb{R}^l, \tag{5.27}$$

sowie

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^l} f(\xi,\eta)\, d\lambda^l(\eta)\, d\lambda^m(\xi) = \int_{\mathbb{R}^l} \int_{\mathbb{R}^m} f(\xi,\eta)\, d\lambda^m(\xi)\, d\lambda^l(\eta)\,. \tag{5.28}$$

Beweis: Ist $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ messbar, so folgt aus dem Satz von Tonelli, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}| \, d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^l} |\tilde{f}(\xi, \eta)| \, d\lambda^l(\eta) \, d\lambda^m(\xi) = \int_{\mathbb{R}^l} \int_{\mathbb{R}^m} |\tilde{f}(\xi, \eta)| \, d\lambda^m(\xi) \, d\lambda^l(\eta) \,. \tag{5.29}$$

Da die linke Seite in (5.29) sich nicht ändert, wenn f auf einer Nullmenge abgeändert wird, hängt die Gültigkeit der Bedingungen (5.24) und (5.25) nicht von der Wahl des Repräsentanten $\tilde{f}$ von $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ab. Damit ist die Äquivalenz der Bedingungen (i), (ii) und (iii) bewiesen. Gilt $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so folgt aus (5.29), dass

$$\lambda^m(\{\xi : \xi \in \mathbb{R}^m, \int_{\mathbb{R}^l} |f(\xi, \eta)| \, d\lambda^l(\eta) = \infty\}) = 0 \,,$$
$$\lambda^l(\{\eta : \eta \in \mathbb{R}^l, \int_{\mathbb{R}^m} |f(\xi, \eta)| \, d\lambda^m(\xi) = \infty\}) = 0 \,,$$

woraus (5.26) und (5.27) folgen. Die letzte Behauptung schließlich folgt ebenfalls aus dem Satz von Tonelli, angewandt auf f^+ und f^-. □

Folgerung 5.10 *Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \ldots dx_n \,, \tag{5.30}$$

und die Reihenfolge der Integrationen darf beliebig vertauscht werden. □

Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $f \in L^1(Q)$, so können wir $f(x) = 0$ setzen für $x \notin Q$ und erhalten

$$\int_Q f \, d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} 1_Q f \, d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}} \ldots \int_{\mathbb{R}} (1_Q f)(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \ldots dx_n \,.$$

Ist Q ein Quader, $Q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, so ist

$$\int_Q f \, d\lambda^n = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \ldots dx_n \,.$$

Allgemeiner: Ist $Q = Q_1 \times Q_2$, $Q_1 \subset \mathbb{R}^m$, $Q_2 \subset \mathbb{R}^l$, $n = m + l$, so ist

$$\int_Q f \, d\lambda^n = \int_{Q_1} \int_{Q_2} f(\xi, \eta) \, d\lambda^l(\eta) \, d\lambda^m(\xi) \,.$$

Wir betrachten Beispiele. Für

$$f(x, y) = xy^2 \,, \quad Q = [1, 2] \times [1, 3] \subset \mathbb{R}^2$$

gilt

$$\int_Q f \, d\lambda^2 = \int_1^2 \int_1^3 xy^2 \, dy \, dx = \int_1^2 \frac{1}{3} xy^3 \Big|_{y=1}^{y=3} dx = \int_1^2 \frac{26}{3} x \, dx = \frac{13}{3} x^2 \Big|_{x=1}^{x=2} = 13 \,.$$

Sei

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \exp\left(\sum_{i=1}^n x_i\right), \quad Q = [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n .$$

Für $n = 2$ gilt

$$\begin{aligned}\int_Q f\,d\lambda^2 &= \int_0^1 \int_0^1 e^{x_1+x_2}\,dx_1\,dx_2 = \int_0^1 \int_0^1 e^{x_1}e^{x_2}\,dx_1\,dx_2 = \int_0^1 e^{x_2} \int_0^1 e^{x_1}\,dx_1\,dx_2 \\ &= \int_0^1 e^{x_2}\,dx_2 \cdot \int_0^1 e^{x_1}\,dx_1 = (e-1)^2 .\end{aligned}$$

Analog gilt für beliebiges n

$$\begin{aligned}\int_Q f\,d\lambda^n &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \exp\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\,dx_1\ldots dx_n = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{i=1}^n e^{x_i}\,dx_1\ldots dx_n \\ &= \prod_{i=1}^n \int_0^1 e^t\,dt = (e-1)^n .\end{aligned}$$

6 Substitutionsformel, Faltung

Wir wollen die Substitutionsregel der Integration im Eindimensionalen,

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx\,, \tag{6.1}$$

ins Mehrdimensionale übertragen.

Satz 6.1 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, sei Ω' Menge, $\mathcal{A}'$ σ-Algebra auf Ω', sei $T : \Omega \to \Omega'$ messbar. Dann gilt für jede messbare Abbildung $f : \Omega' \to [0, \infty]$*

$$\int_{\Omega'} f\,dT(\mu) = \int_\Omega f \circ T\,d\mu\,. \tag{6.2}$$

Beweis: Die Abbildung $f \circ T$ ist messbar und nichtnegativ, also ist die rechte Seite von (6.2) definiert. Sei als erstes $f = 1_{A'}$, $A' \in \mathcal{A}'$, dann gilt, da $1_{T^{-1}A'} = 1_{A'} \circ T$,

$$\int_{\Omega'} 1_{A'}\,dT(\mu) = (T(\mu))(A') = \mu(T^{-1}(A')) = \int_\Omega 1_{T^{-1}A'}\,d\mu = \int_\Omega 1_{A'} \circ T\,d\mu\,. \tag{6.3}$$

Für $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A'_i}$, $A'_i \in \mathcal{A}'$, folgt aus (6.3)

$$\int_{\Omega'} f\,dT(\mu) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{\Omega'} 1_{A'_i}\,dT(\mu) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_\Omega 1_{A'_i} \circ T\,d\mu = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \alpha_i (1_{A'_i} \circ T)\,d\mu \tag{6.4}$$

$$= \int_\Omega f \circ T\,d\mu\,. \tag{6.5}$$

Sei nun f beliebig, sei $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $f_n \in E_+(\Omega)$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, $f_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus dem Satz von Beppo-Levi folgt

$$\int_{\Omega'} f\,dT(\mu) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\Omega'} f_n\,dT(\mu) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n \circ T\,d\mu = \int_\Omega f \circ T\,d\mu\,.$$

$\square$

Folgerung 6.2 *Seien die Voraussetzungen von Satz 6.1 erfüllt. Dann gilt*

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega'; T(\mu)) \qquad \Rightarrow \qquad f \circ T \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mu)\,. \tag{6.6}$$

Ist T außerdem bijektiv, so gilt auch die Umkehrung von (6.6).

Beweis: Wir wenden Satz 6.1 an auf f^+ und f^- und erhalten (6.6). Sei nun T bijektiv,

$$f \circ T \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mu) = \mathcal{L}^1(\Omega; T^{-1}(T(\mu)))\,.$$

Dann folgt aus (6.6), angewendet auf $f \circ T$ statt auf f,

$$f = (f \circ T) \circ T^{-1} \in \mathcal{L}^1((T^{-1})^{-1}(\Omega); T(\mu)) = \mathcal{L}^1(\Omega'; T(\mu))\,.$$

$\square$

Satz 6.3 (Substitutionsformel für affine Transformationen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar, sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$T(x) = Ax + b\,, \tag{6.7}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ nichtsingulär und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für jede integrierbare Funktion $f : T(\Omega) \to [-\infty, \infty]$

$$\int_\Omega f(Ax+b)\, d\lambda^n(x) = \frac{1}{|\det(A)|} \int_{T(\Omega)} f(y)\, d\lambda^n(y)\,. \tag{6.8}$$

Beweis: Folgt aus (6.6), da

$$T(\lambda^n) = \frac{1}{|\det(A)|}\lambda^n$$

gilt wegen der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes und wegen Satz 2.35. □

Wir gehen wieder zur gewohnten Notation über, das heißt, für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ , \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \sin x_3\,,$$

bedeuten

$$\int_\Omega f\, d\lambda^3\,, \quad \int_\Omega f(x)\, d\lambda^3(x)\,, \quad \int_\Omega f(x)\, dx\,, \quad \int_\Omega x_1 x_2 \sin x_3\, dx$$

dasselbe. Als Beispiel berechnen wir

$$\int_{\Omega'} x_1 x_2\, dx\,, \tag{6.9}$$

wobei $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ das Parallelogramm mit den Ecken $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$ und $(3,1)$ ist. Wir setzen

$$\Omega = [0,1]^2\,, \quad T(x) = Ax\,, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \quad f(x_1, x_2) = x_1 x_2\,,$$

dann ist

$$f(Ax) = f\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = (2x_1 + x_2)x_2\,, \quad T(\Omega) = \Omega'\,, \quad |\det(A)| = 2\,,$$

also

$$\int_{\Omega'} x_1 x_2\, dx = 2\int_\Omega (2x_1 + x_2)x_2\, dx = 2\int_0^1 \int_0^1 2x_1 x_2 + x_2^2\, dx_1\, dx_2 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}\,.$$

Faltung. Ist $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben (wir nehmen für einen Moment an, dass f beschränkt und messbar ist), so ist die Funktion $z : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$z(y) = \int_0^y f(x) e^{-a(y-x)}\, dx\,,$$

die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe

$$z' + az = f(x)\,, \quad z(0) = 0\,.$$

Definieren wir

$$g(\xi) = \begin{cases} e^{-a\xi}, & \xi \geq 0, \\ 0, & \xi < 0, \end{cases} \tag{6.10}$$

und setzen wir $f(x) = 0$ für $x < 0$, so gilt

$$z(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y-x)\,dx, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{6.11}$$

Durch diese Gleichung wird der Funktion f eine Funktion z zugeordnet. Lässt man für g auch andere Funktionen zu, so stellt (6.11) ein grundlegendes mathematisches Modell in der Theorie der Signalverarbeitung dar. Dabei steht f für das Eingangssignal, z für das Ausgangssignal, und g repräsentiert die Eigenschaften der Übertragungsstrecke (des "Kanals").

Satz 6.4 (Faltung)
Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann wird durch

$$(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y-x)\,dx \tag{6.12}$$

eine Funktion $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert (sie heißt "Faltung von f und g"), und es gilt

$$f * g = g * f, \quad \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1. \tag{6.13}$$

Beweis: Seien $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ Repräsentanten von f bzw. g. Wir definieren

$$\tilde{h} : \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

durch

$$\tilde{h}(x,y) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(y).$$

Dann gilt nach dem Satz von Tonelli

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |\tilde{h}|\,d\lambda^{2n} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\tilde{f}(x)|\,|\tilde{g}(y)|\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(x)|\,dx \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{g}(y)|\,dy = \|\tilde{f}\|_1 \|\tilde{g}\|_1, \tag{6.14}$$

also $\tilde{h} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{2n})$. Wir definieren

$$T : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}, \quad T(x,y) = (x, y-x).$$

Dann wird T durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix}, \quad I = \text{Einheitsmatrix im } \mathbb{R}^n,$$

repräsentiert. Es ist $\det(A) = 1$ und

$$(\tilde{h} \circ T)(x,y) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(y-x).$$

Aus der Substitutionsformel (Satz 6.3) folgt mit (6.14)

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |\tilde{f}(x)\tilde{g}(y-x)|\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\tilde{h} \circ T|\,d\lambda^{2n} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\tilde{h}|\,d\lambda^{2n} = \|\tilde{f}\|_1 \|\tilde{g}\|_1.$$

Hieraus folgt, wiederum mit Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(\tilde{f} * \tilde{g})(y)| \, dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(x)\tilde{g}(y-x)| \, dx \, dy = \|\tilde{f}\|_1 \|\tilde{g}\|_1 \,,$$

also ist $\tilde{f} * \tilde{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|\tilde{f} * \tilde{g}\|_1 \leq \|\tilde{f}\|_1 \|\tilde{g}\|_1 \,, \tag{6.15}$$

Nach Fubini gilt außerdem

$$|(\tilde{f} * \tilde{g})(y)| < \infty \tag{6.16}$$

für fast alle $y \in \mathbb{R}^n$. Für jedes feste solche $y \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir

$$\hat{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \,, \quad \hat{T}(x) = y - x \,,$$
$$\hat{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,, \quad \hat{h}(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(y-x) \,.$$

Da $|\det(\hat{T})| = 1$, gilt

$$(\tilde{f} * \tilde{g})(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)\tilde{g}(y-x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h} \, d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h} \circ \hat{T} \, d\lambda^n \tag{6.17}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y-x)\tilde{g}(x) \, dx = (\tilde{g} * \tilde{f})(y) \,, \tag{6.18}$$

also ist

$$\tilde{f} * \tilde{g} = \tilde{g} * \tilde{f} \,, \quad \text{für fast alle } y \in \mathbb{R}^n. \tag{6.19}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $f * g$ unabhängig ist von der Wahl der Repräsentanten von f und g. Seien dazu $\tilde{\tilde{f}}, \tilde{\tilde{g}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit

$$[\tilde{f}] = [\tilde{\tilde{f}}] \,, \quad [\tilde{g}] = [\tilde{\tilde{g}}] \,.$$

Für $\tilde{\tilde{h}}(x,y) = \tilde{\tilde{f}}(x)\tilde{\tilde{g}}(y)$ gilt dann

$$[\tilde{h}] = [\tilde{\tilde{h}}] \,,$$

da

$$\{\tilde{h} \neq \tilde{\tilde{h}}\} \subset (\{\tilde{f} \neq \tilde{\tilde{f}}\} \times \mathbb{R}^n) \cup (\mathbb{R}^n \times \{\tilde{g} \neq \tilde{\tilde{g}}\}) \,.$$

Es folgt

$$[\tilde{h} \circ T] = [\tilde{\tilde{h}} \circ T] \,,$$

da T und T^{-1} Nullmengen auf Nullmengen abbilden. Aus dem Satz von Fubini folgt nun

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f} * \tilde{g} - \tilde{\tilde{f}} * \tilde{\tilde{g}}| \, d\lambda^n \leq \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\tilde{h} \circ T - \tilde{\tilde{h}} \circ T| \, d\lambda^{2n} = 0 \,,$$

also

$$[\tilde{f} * \tilde{g}] = [\tilde{\tilde{f}} * \tilde{\tilde{g}}] \,.$$

□

Die Faltungsoperation kann dazu verwendet werden, Funktionen zu "glätten" (das heißt, durch "glattere" Funktionen zu approximieren). Betrachten wir etwa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und definieren wir einen "gleitenden Mittelwert"

$$f_\varepsilon(y) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} f(x)\, dx\,.$$

Wir definieren die "Glättungsfunktion"

$$g_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{2\varepsilon} 1_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(\xi)\,,$$

dann ist

$$\begin{aligned}(f * g_\varepsilon)(y) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) g_\varepsilon(y-x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{2\varepsilon} 1_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(y-x)\, dx = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} f(x)\, dx \\ &= f_\varepsilon(y)\,.\end{aligned}$$

Dies entspricht der Approximation der Ableitung durch den zentralen Differenzenquotienten, da

$$f_\varepsilon'(y) = \frac{1}{2\varepsilon}(f(y+\varepsilon) - f(y-\varepsilon))\,.$$

Wir sehen, dass die Differenzierbarkeitsordnung von f_ε um 1 höher ist als die von f. Wir konstruieren nun eine andere Glättungsfunktion, so dass f_ε sogar unendlich oft differenzierbar ist, auch wenn f nur stetig ist. Dazu betrachten wir zunächst

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t}\right)\,, & t > 0\,, \\ 0\,, & t \le 0\,. \end{cases} \tag{6.20}$$

Aus der Analysis 1 wissen wir, dass $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Wir definieren weiter

$$\varphi_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(\xi) = \alpha\psi(1 - \|\xi\|_2^2)\,, \quad \alpha > 0\,. \tag{6.21}$$

Dann ist (Kettenregel)

$$\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\,, \quad \operatorname{supp}(\varphi_1) = \overline{\{\xi : \varphi_1(\xi) \ne 0\}} = \{\xi : \|\xi\|_2 \le 1\}\,. \tag{6.22}$$

Wir wählen $\alpha > 0$ so, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(\xi)\, d\xi = 1\,, \tag{6.23}$$

und definieren

$$\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \varphi_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi_1\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)\,, \quad \varepsilon > 0\,. \tag{6.24}$$

Lemma 6.5 *Die in (6.24) definierte Funktion φ_ε hat für $\varepsilon > 0$ die folgenden Eigenschaften:*

$$\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\,, \quad \operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon) = \{\xi : \|\xi\|_2 \le \varepsilon\}\,, \quad \varphi_\varepsilon \ge 0\,, \tag{6.25}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(\xi)\, d\xi = 1\,. \tag{6.26}$$

Beweis: Die Eigenschaften (6.25) folgen unmittelbar aus der Konstruktion in (6.20) - (6.24). Mit der Substitution

$$T\xi = \frac{\xi}{\varepsilon}, \quad |\det(T)| = \frac{1}{\varepsilon^n},$$

erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(y)\, dy = 1\,.$$

□

Satz 6.6 *Sei $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, das heißt, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig und hat kompakten Träger. Dann ist $f_\varepsilon = f * \varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, und es gilt $f_\varepsilon \to f$ gleichmäßig für $\varepsilon \downarrow 0$.*

Beweis: Es ist

$$f_\varepsilon(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_\varepsilon(y-x)\, dx\,,$$

und daher wegen (6.25)

$$\operatorname{supp}(f_\varepsilon) \subset U_\varepsilon(\operatorname{supp}(f)) := \{x : \operatorname{dist}(x, \operatorname{supp}(f)) \leq \varepsilon\}\,,$$

also ist $\operatorname{supp}(f_\varepsilon)$ kompakt. Es gilt weiter für jeden Multiindex α

$$|f(x)\partial^\alpha \varphi_\varepsilon(y-x)| \leq \|f\|_\infty \|\partial^\alpha \varphi_\varepsilon\|_\infty\,,$$

falls $y \in \operatorname{supp}(f_\varepsilon)$, und $f(x)\partial^\alpha\varphi_\varepsilon(y-x) = 0$ andernfalls. Hieraus und aus Satz 4.23 folgt, dass $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sei nun $\eta > 0$. Wir wählen $\varepsilon > 0$ so, dass

$$\|y-x\|_2 \leq \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(y)| \leq \eta\,.$$

Das ist möglich, da f gleichmäßig stetig auf $\operatorname{supp}(f)$ (und damit auch auf $\mathbb{R}^n$) ist. Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt nun

$$f(y) = f(y)\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y-x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi_\varepsilon(y-x)\, dx\,,$$

also

$$|f(y) - f_\varepsilon(y)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) - f(x)|\varphi_\varepsilon(y-x)\, dx \leq \eta \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y-x)\, dx = \eta\,,$$

also

$$\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leq \eta\,.$$

□

Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gilt ebenfalls $f_\varepsilon = f * \varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (das folgt ebenfalls aus Satz 4.23). Es gilt außerdem $f_\varepsilon \to f$ in der L^p-Norm, was wir hier nicht beweisen wollen. □

Wir beschäftigen uns nun mit der Substitutionsregel für nichtlineare Transformationen T.

Definition 6.7
Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $T : U \to V$ heißt C^k-Diffeomorphismus, falls T bijektiv ist und falls $T \in C^k(U; \mathbb{R}^n)$ und $T^{-1} \in C^k(V; \mathbb{R}^n)$ gelten. □

Lemma 6.8 *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $T : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Sei $I = [a, b) \in \mathcal{J}^n$ mit $\overline{I} \subset U$. Dann gilt*

$$\lambda^n(T(I)) \le \sup_{x \in I} |\det DT(x)| \cdot \lambda^n(I) . \tag{6.27}$$

Beweis: Der Fall $I = \emptyset$ ist trivial. Sei also $I \neq \emptyset$, also $\lambda^n(I) > 0$. Wir definieren $c \ge 0$ durch

$$\lambda^n(T(I)) = c\lambda^n(I) . \tag{6.28}$$

Wir zerlegen $I^{(0)} := I$ durch Halbierung jeder Seite, also in 2^n Teilquader. Sei $I^{(1)}$ einer dieser Teilquader mit

$$\lambda^n(T(I^{(1)})) \ge c\lambda^n(I^{(1)}) .$$

Einen solchen Teilquader muss es geben, da andernfalls (6.28) nicht gilt. Durch Wiederholen dieser Konstruktion erhalten wir eine Folge $(I^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{J}^n$ mit $I^{(k+1)} \subset I^{(k)}$ und

$$\lambda^n(T(I^{(k)})) \ge c\lambda^n(I^{(k)}) \tag{6.29}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Da die zugehörigen Seitenlängen gegen 0 konvergieren und da $\overline{I}$ kompakt ist, gibt es ein $z \in \overline{I}$ mit

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{I^{(k)}} = \{z\} . \tag{6.30}$$

Sei $x^{(k)}$ der Mittelpunkt von $I^{(k)}$, wir setzen

$$I_\varepsilon^{(k)} = (1 + \varepsilon)(I^{(k)} - x^{(k)}) + x^{(k)} . \tag{6.31}$$

Die Idee des Beweises besteht nun darin, $T(I^{(k)})$ als Teilmenge des Bildes von $I_\varepsilon^{(k)}$ unter der Linearisierung von T zu erhalten und hierauf die Substitutionsformel für affine Transformationen anzuwenden. Wir definieren zunächst eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$\|x\| = \max_{1\le i\le n} \frac{2}{b_i - a_i} |x_i| . \tag{6.32}$$

Es ist dann

$$\overline{I^{(k)}} = K(x^{(k)}, 2^{-k}) = \{x : \|x - x^{(k)}\| \le 2^{-k}\} , \quad \overline{I_\varepsilon^{(k)}} = K(x^{(k)}, (1 + \varepsilon)2^{-k}) . \tag{6.33}$$

Bestimme M so, dass (Satz aus der Analysis 2)

$$\|DT(z)^{-1}y\| \le M\|y\| , \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n . \tag{6.34}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ fest gewählt. Wir wählen k hinreichend groß, so dass

$$\|T(x) - T(z) - DT(z)(x - z)\| \le \frac{\varepsilon}{2M} \|x - z\| , \quad \text{für alle } x \in I^{(k)}. \tag{6.35}$$

(T ist differenzierbar.) Es ist dann

$$T(x) - T(z) - DT(z)(x-z) \in K(0, \frac{\varepsilon}{M} 2^{-k}),$$

also

$$T(I^{(k)}) \subset T(z) + DT(z)(I^{(k)} - z) + K(0, \frac{\varepsilon}{M} 2^{-k}). \tag{6.36}$$

Aus (6.34) folgt

$$K(0, \frac{\varepsilon}{M} 2^{-k}) = DT(z) DT(z)^{-1} K(0, \frac{\varepsilon}{M} 2^{-k}) \subset DT(z) K(0, \varepsilon 2^{-k}),$$

also

$$\begin{aligned} T(I^{(k)}) &\subset T(z) + DT(z)(I^{(k)} - z) + DT(z) K(0, \varepsilon 2^{-k}) \\ &= T(z) + DT(z)(I^{(k)} + K(0, \varepsilon 2^{-k}) - z), \end{aligned}$$

und hieraus folgt wegen (6.33) und

$$K(x^{(k)}, 2^{-k}) + K(0, \varepsilon 2^{-k}) \subset K(x^{(k)}, (1+\varepsilon) 2^{-k})$$

dass

$$T(I^{(k)}) \subset T(z) + DT(z)(K(x^{(k)}, (1+\varepsilon)2^{-k}) - z) = T(I^{(k)}) \subset T(z) + DT(z)(\overline{I_\varepsilon^{(k)}} - z).$$

Aus der Transformationsformel für das Lebesgue-Maß unter der linearen Abbildung $DT(z)$ und der Translationsinvarianz folgt

$$\begin{aligned} \lambda^n(T(I^{(k)})) &\le \lambda^n(DT(z)(\overline{I_\varepsilon^{(k)}} - z)) \\ &= |\det DT(z)| \lambda^n(\overline{I_\varepsilon^{(k)}}) \\ &= |\det DT(z)| (1+\varepsilon)^n \lambda^n(I^{(k)}). \end{aligned}$$

Aus (6.29) folgt nun

$$c\lambda^n(I^{(k)}) \le \lambda^n(T(I^{(k)})) \le |\det DT(z)| (1+\varepsilon)^n \lambda^n(I^{(k)}) \tag{6.37}$$

$$\le (1+\varepsilon)^n \lambda^n(I^{(k)}) \sup_{x \in I} |\det DT(x)|, \tag{6.38}$$

und weiter

$$c \le (1+\varepsilon)^n \sup_{x \in I} |\det DT(x)|. \tag{6.39}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt

$$c \le \sup_{x \in I} |\det DT(x)|$$

und damit (6.27) aus (6.28). □

Lemma 6.9 *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $T : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Sei $I = [a,b) \in \mathcal{J}^n$ mit $\overline{I} \subset U$. Dann gilt*

$$\lambda^n(T(I)) \le \int_I |\det DT(x)| \, d\lambda^n(x). \tag{6.40}$$

Beweis: Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $(I_{k,j})$, $1 \le j \le 2^{kn}$, diejenige disjunkte Zerlegung von I in 2^{kn} Teilquader, welche durch k-fache Halbierung jeder Seite (d.h. Zerlegung jeder Seite in 2^k Teile) von I entsteht. Wir definieren $u_k : I \to \mathbb{R}$ durch

$$u_k = \sum_{j=1}^{2^{kn}} 1_{I_{k,j}} \sup_{\xi \in I_{k,j}} |\det DT(\xi)| \,. \tag{6.41}$$

Aus Lemma 6.8 folgt nun für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\lambda^n(T(I)) = \sum_{j=1}^{2^{kn}} \lambda(T(I_{k,j})) \le \sum_{j=1}^{2^{kn}} \lambda^n(I_{k,j}) \sup_{\xi \in I_{k,j}} |\det DT(\xi)| = \int_I u_k(x)\, d\lambda^n(x) \,. \tag{6.42}$$

Da DT und die Determinantenfunktion stetig und $\overline{I}$ kompakt sind, ist $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt, und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} u_k(x) = |\det DT(x)|$$

punktweise (sogar gleichmäßig) in I. Aus dem Satz von Lebesgue folgt daher

$$\lim_{k\to\infty} \int_I u_k(x)\, dx = \int_I |\det DT(x)|\, dx \,,$$

also mit (6.42) die Behauptung. □

Satz 6.10 (Dichte) *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $g : \Omega \to [0,\infty]$ messbar. Dann wird durch*

$$\nu(A) = \int_A g\, d\mu \,, \quad A \in \mathcal{A} \,, \tag{6.43}$$

ein Maß ν auf $\mathcal{A}$ definiert. Für $f : \Omega \to [-\infty,\infty]$ gilt

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega;\nu) \qquad \Leftrightarrow \qquad f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\Omega;\mu) \,, \tag{6.44}$$

und in diesem Fall ist

$$\int_A f\, d\nu = \int_A fg\, d\mu \,, \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}. \tag{6.45}$$

Wir schreiben

$$\nu = g\mu \tag{6.46}$$

und sagen, dass ν die Dichte g bezüglich μ hat.

Beweis: Übung. □

Lemma 6.11 *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $T : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann gilt für alle Borelmengen $A \subset U$*

$$\lambda^n(T(A)) \le \int_A |\det DT(x)|\, d\lambda^n(x) \,. \tag{6.47}$$

Beweis: Nach Satz 6.10 wird durch

$$\nu(A) = \int_A |\det DT(x)|\, d\lambda^n(x) \tag{6.48}$$

ein Maß auf der (auf U eingeschränkten) Borel-Algebra definiert, und nach Lemma 6.9 gilt

$$(T^{-1}(\lambda^n))(I) = \lambda^n(T(I)) \le \nu(I) \tag{6.49}$$

für alle $I \in \mathcal{J}^n$ mit $\overline{I} \subset U$. Da alle solchen I einen Erzeuger der auf U eingeschränkten Borel-Algebra bilden, gilt für die zugehörigen äußeren Maße (siehe Beweis des Maßerweiterungssatzes)

$$(T^{-1}(\lambda^n))^*(Q) \le \nu^*(Q)$$

für alle $Q \subset U$, und aus dem Eindeutigkeitssatz für Fortsetzungen von Maßen folgt

$$(T^{-1}(\lambda^n))(A) \le \nu(A)$$

für alle Borelmengen A. □

Lemma 6.12 *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $T : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus, sei $f : V \to [0, \infty]$ messbar. Dann gilt*

$$\int_{T(U)} f(y)\, d\lambda^n(y) \le \int_U f(T(x))|\det DT(x)|\, d\lambda^n(x)\,. \tag{6.50}$$

Beweis: Ist $A \subset U$ messbar und $f = 1_{T(A)}$, so folgt (6.50) direkt aus (6.47). Hieraus folgt für

$$f = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j 1_{T(A_j)}\,,$$

mit $\alpha_j \ge 0$ und $A_j \subset U$ messbar, mit der Linearität des Integrals ebenfalls (6.50), und die Erweiterung auf beliebige nichtnegative messbare Funktionen wird wie gehabt mit dem Satz von Beppo-Levi ausgeführt. □

Satz 6.13 (Substitutionsregel)
Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $T : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus, sei $f : V \to [-\infty, \infty]$ messbar. Dann gilt

$$f \in \mathcal{L}^1(V) \qquad \Leftrightarrow \qquad f \circ T \cdot |\det DT| \in \mathcal{L}^1(U)\,, \tag{6.51}$$

und in diesem Fall ist

$$\int_{T(U)} f(y)\, dy = \int_U f(T(x))|\det DT(x)|\, dx\,. \tag{6.52}$$

Beweis: Sei zunächst $f \ge 0$. Nach Lemma 6.12 gilt

$$\int_{T(U)} f(y)\, dy \le \int_U f(T(x))|\det DT(x)|\, dx\,.$$

Vertauschen wir U und V und wenden wir Lemma 6.12 an auf die Funktion

$$f \circ T \cdot |\det DT| : U = T^{-1}(V) \to [0, \infty],$$

so gilt

$$\begin{aligned}\int_{T^{-1}(V)} &(f \circ T)(x))|\det DT(x)|\, dx \\ &\le \int_V (f \circ T)(T^{-1}(y))|\det DT(T^{-1}(y))| \cdot |\det DT^{-1}(y)|\, dy \\ &= \int_V f(y)\, dy.\end{aligned}$$

Aus dem Satz über inverse Funktionen folgt

$$DT^{-1}(y) = (DT(T^{-1}(y)))^{-1}, \quad \det DT^{-1}(y) = \frac{1}{\det DT(T^{-1}(y))},$$

also gilt (6.52). Da

$$[(f \circ T)|\det DT|]^{\pm} = f^{\pm} \circ T|\det DT|,$$

folgen nun alle Aussagen aus der Zerlegung $f = f^+ - f^-$. □

Satz 6.14 (Polarkoordinaten in der Ebene)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ messbar, sei $T : (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ definiert durch

$$T(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi). \tag{6.53}$$

Für

$$\tilde{f}(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r \tag{6.54}$$

gilt

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2) \qquad \Leftrightarrow \qquad \tilde{f} \in \mathcal{L}^1((0, \infty) \times (0, 2\pi)), \tag{6.55}$$

und in diesem Fall ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r\, dr\, d\varphi. \tag{6.56}$$

Beweis: Wir setzen in Satz 6.13

$$U = (0, \infty) \times (0, 2\pi), \quad V = T(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \ge 0\}.$$

Da $\mathbb{R}^2 \setminus V$ eine Nullmenge ist, gilt

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2) \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathcal{L}^1(V), \quad \int_{\mathbb{R}^2} f\, d\lambda^2 = \int_V f\, d\lambda^2.$$

Wegen $|\det DT(r, \varphi)| = r$ folgen nun alle Behauptungen aus Satz 6.13. □

Beispiel 6.15

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch, das heißt,
$$f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})\,, \quad g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\,.$$
Dann ist $(f \circ T)(r,\varphi) = g(r)$, also
$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty g(r) r \, dr \, d\varphi = 2\pi \int_0^\infty g(r) r \, dr\,,$$
falls $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(0,\infty)$ gilt für die durch $\tilde{f}(r) = rg(r)$ definierte Funktion $\tilde{f}$.
2. Fläche des Kreises K_R um 0 mit Radius R: Hier ist $g = 1_{[0,R]}$,
$$\lambda^2(K_R) = 2\pi \int_0^\infty r 1_{[0,R]}(r) \, dr = \pi R^2\,.$$
3. Für
$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$$
erhalten wir
$$g(r) = e^{-r^2}\,,$$
also
$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda^2 = 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2} \, dr = -\pi e^{-r^2} \Big|_{r=0}^{r=\infty} = \pi\,.$$

Satz 6.16 (Kugelkoordinaten im Raum)
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ messbar, sei $T : (0,\infty) \times (0,\pi) \times (0,2\pi) = U \to \mathbb{R}^3$ definiert durch
$$T(r,\theta,\varphi) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta)\,. \tag{6.57}$$
Für
$$\tilde{f}(r,\theta,\varphi) = f(T(r,\theta,\varphi)) \cdot r^2 \sin\theta \tag{6.58}$$
gilt
$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3) \qquad \Leftrightarrow \qquad \tilde{f} \in \mathcal{L}^1(U)\,, \tag{6.59}$$
und in diesem Fall ist
$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty f(T(r,\theta,\varphi)) r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi\,. \tag{6.60}$$

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 6.14, beachte, dass
$$\mathbb{R}^3 \setminus T(U) = \{(x,0,z) : x \geq 0,\ z \in \mathbb{R}\}$$
eine Nullmenge ist. □

Beispiel 6.17

1. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch, das heißt,

$$f(x, y, z) = g(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\,, \quad g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\,.$$

Dann ist $(f \circ T)(r, \theta, \varphi) = g(r)$, also

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} f\,d\lambda^3 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} g(r) r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_0^{\infty} g(r) r^2\,dr \\ &= 4\pi \int_0^{\infty} g(r) r^2\,dr\,, \end{aligned} \tag{6.61}$$

und

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3) \qquad \Leftrightarrow \qquad r^2 g(r) \in \mathcal{L}^1(0, \infty)\,.$$

2. Volumen der Kugel K_R um 0 mit Radius R: Hier ist $g = 1_{[0,R]}$,

$$\lambda^3(K_R) = 4\pi \int_0^{\infty} r^2 1_{[0,R]}(r)\,dr = 4\pi \int_0^R r^2\,dr = \frac{4}{3}\pi R^3\,.$$

3. Gravitationspotential der Kugel K_R mit rotationssymmetrischer Dichte ρ: Das Potential im Punkt $P = (0, 0, a)$ oberhalb der Kugel $(a > R)$ ist gegeben durch

$$u(P) = \gamma \int_{K_R} \frac{\rho(\|x\|_2)}{\|x - P\|_2}\,d\lambda^3(x)\,,$$

wobei γ die Gravitationskonstante ist. Wir substituieren $x = T(r, \theta, \varphi)$ und erhalten

$$\rho(T(r, \theta, \varphi)) = \rho(r)\,,$$

sowie

$$\begin{aligned}\|T(r, \theta, \varphi) - P\|_2^2 &= r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + (a - r\cos\theta)^2 \\ &= r^2 \sin^2\theta + a^2 - 2ar\cos\theta + r^2\cos^2\theta \\ &= a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta\,.\end{aligned}$$

Es folgt also

$$\begin{aligned}u(P) = \gamma \int_{K_R} \frac{\rho(\|x\|_2)}{\|x - P\|_2}\,d\lambda^3(x) &= \gamma \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{\rho(r) r^2 \sin\theta}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}}\,dr\,d\theta\,d\varphi \\ &= 2\pi\gamma \int_0^R \rho(r) r^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}}\,d\theta\,dr\,.\end{aligned}$$

Substitution $t = -\cos\theta$, $dt = \sin\theta\,d\theta$ ergibt

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}}\,d\theta &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2 + 2art}}\,dt = \frac{1}{ar}\sqrt{a^2 + r^2 + 2art}\,\Big|_{t=-1}^{t=1} \\ &= \frac{1}{ar}\left(\sqrt{(a + r)^2} - \sqrt{(a - r)^2}\right) = \frac{2}{a}\,,\end{aligned}$$

also

$$u(P) = \frac{4\pi\gamma}{a} \int_0^R \rho(r) r^2 \, dr \, .$$

Andererseits gilt für die Gesamtmasse der Kugel

$$M = \int_{K_R} \rho(x) \, dx = 4\pi \int_0^\infty 1_{[0,R]}(r) \rho(r) r^2 \, dr = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 \, dr \, ,$$

also

$$u(P) = \frac{\gamma M}{a} \, .$$

Als Ergebnis erhalten wir: Das von der Kugel herrührende Gravitationsfeld ist außerhalb der Kugel dasselbe wie das von einer Punktmasse M im Nullpunkt erzeugte Feld.

7 Mannigfaltigkeiten, Oberflächenintegral

Ziel dieses Abschnittes ist es, das Integral einer nur auf einer k-dimensionalen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit $k < n$ definierten Funktion zu definieren, und zwar so, dass es einem Integral im $\mathbb{R}^k$ entspricht. Wir wollen uns dabei nicht auf k-dimensionale Unterräume oder deren Translationen beschränken (hier könnten wir das bereits definierte Integral durch eine lineare Isomorphie einfach übertragen), sondern auch allgemeinere Mengen, etwa (eindimensionale) Kurven oder (zweidimensionale) gekrümmte Flächen betrachten. Wir müssen daher den Begriff der Dimension auf allgemeinere Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ausdehnen.

Wir gehen aus von der Beschreibung affiner Unterräume. Ist $a \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor und $X \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum mit $\dim X = k$, so können wir den affinen Unterraum

$$M = \{a + x : x \in X\} \tag{7.1}$$

auf zwei verschiedene Weisen beschreiben:

- mit einer Parameterdarstellung: Sei $(v_1, \ldots, v_k)$ Basis von X, sei $\Phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ definiert durch
$$\Phi(t_1, \ldots, t_k) = a + \sum_{i=1}^{k} t_i v_i \,, \tag{7.2}$$
dann ist
$$M = \Phi(X)\,, \quad \Phi : \mathbb{R}^k \to M \quad \text{bijektiv.} \tag{7.3}$$

- als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems: Sei $(w_1, \ldots, w_{n-k})$ Basis des orthogonalen Komplements
$$X^\perp = \{w : \, w^T x = 0 \quad \text{für alle } x \in X\}\,, \tag{7.4}$$
sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ definiert durch
$$f_i(x) = w_i^T (x - a)\,, \tag{7.5}$$
so ist
$$M = \{x : \, f(x) = 0\}\,. \tag{7.6}$$

Affin lineare Unterräume können also als Urbild der 0 bzw. als Bild eines $\mathbb{R}^k$ vermittels affin linearer Abbildungen dargestellt werden. Verzichten wir auf die Linearität, so können wir allgemeinere Teilmengen darstellen, etwa gekrümmte Flächen. Wir werden aber verlangen, dass die darstellenden Abbildungen differenzierbar sind.

Nun ist es aber so, dass man zur Darstellung einer gekrümmten Fläche im allgemeinen mit einer darstellenden Abbildung nicht auskommt, sondern mehrere benötigt, die geeignet zusammengesetzt werden müssen.

Definition 7.1 (Mannigfaltigkeit)
Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ (hierbei ist

$0 \le k \le n$, $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), falls zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung U im $\mathbb{R}^n$ und ein $f \in C^\alpha(U; \mathbb{R}^{n-k})$ existieren mit

$$M \cap U = \{x : f(x) = 0\}, \qquad \operatorname{rang} J_f(a) = n - k. \tag{7.7}$$

□

Beispiel 7.2

1. Affine Unterräume. Wie in (7.4) – (7.6) dargestellt, können wir in Definition 7.1 $U = \mathbb{R}^n$ und für jedes a dasselbe f wählen.

2. Niveaumengen. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^\alpha(U)$, $c \in \mathbb{R}$,

   $$N_c(f) = \{x : f(x) = c\}. \tag{7.8}$$

   $N_c(f)$ ist eine (n-1)-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit, falls $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ gilt für alle $x \in N_c(f)$. Ein Spezialfall davon ist die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel in der euklidischen Norm,

   $$S_{n-1} = \{x : \|x\|_2 = 1\}. \tag{7.9}$$

   S_{n-1} ist eine $(n-1)$-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit.

□

Satz 7.3 (Darstellung von C^α-Mannigfaltigkeiten)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:

(i) M ist eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit.

(ii) Für alle $a \in M$ gibt es offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ und einen C^α-Diffeomorphismus $F : U \to V$ mit $a \in U$ und

$$F(M \cap U) = V \cap E_k, \quad E_k = \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le k\}. \tag{7.10}$$

(iii) Für alle $a \in M$ gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $a \in U$, eine offene Menge $T \subset \mathbb{R}^k$ und ein $\Phi \in C^\alpha(T; \mathbb{R}^n)$, so dass $\Phi : T \to M \cap U$ bijektiv, $\Phi^{-1} : M \cap U \to T$ stetig ist und

$$\operatorname{rang} J_\Phi(t) = k, \quad \textit{für alle } t \in T. \tag{7.11}$$

Beweis: "(i)⇒(ii)": Sei U' Umgebung von $a \in M$, sei $f \in C^\alpha(U'; \mathbb{R}^{n-k})$ mit

$$M \cap U' = \{x : x \in \mathbb{R}^n, f(x) = 0\}, \qquad \operatorname{rang} J_f(a) = n - k.$$

Wir betrachten zunächst den Spezialfall, dass die letzten $n - k$ Spalten von $J_f(a)$ linear unabhängig sind. Wir zerlegen $x \in \mathbb{R}^n$ in

$$x = (\xi, \eta), \quad \xi \in \mathbb{R}^k, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-k}.$$

Die Matrix $\partial_\eta f(a) \in \mathbb{R}^{(n-k,n-k)}$ ist invertierbar. Also gibt es (Satz über implizite Funktionen) offene Mengen $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$, mit $(a_1, \ldots, a_k) \in U_1$, und ein $g : U_1 \to U_2$, $g \in C^\alpha(U_1; \mathbb{R}^{n-k}$, mit

$$M \cap (U_1 \times U_2) = \{(\xi, g(\xi)) : \xi \in U_1\} \subset M \cap U' \,,$$

also $f(\xi, g(\xi)) = 0$. Wir setzen

$$U = U_1 \times U_2 \,, \quad V = F(U) \,, \quad F(\xi, \eta) = (\xi, \eta - g(\xi)) \,.$$

Dann ist F injektiv, also $F : U \to F(U)$ bijektiv, und

$$(\xi, \eta) \in M \cap U \quad \Leftrightarrow \quad \xi \in U_1 \,, \quad \eta = g(\xi) \quad \Leftrightarrow \quad F(\xi, \eta) \in V \cap E_k \,.$$

Weiter ist

$$J_F(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -J_g(\xi) & I \end{pmatrix} \,,$$

also $J_F(\xi, \eta)$ invertierbar und daher (Satz über inverse Funktionen) F ein C^α-Diffeomorphismus. Der allgemeine Fall wird durch Umnumerieren der Koordinatenachsen darauf zurückgeführt. Seien die Spalten $i_1, i_2, \ldots, i_{n-k}$ von $J_f(a)$ linear unabhängig. Sei $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, welche die Einheitsvektoren permutiert, und zwar der Form

$$P(x_1, \ldots, x_n) = (\ldots, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}) \,.$$

Dann ist

$$P(M) = \{x : x \in \mathbb{R}^n, \, (f \circ P^{-1})(x) = 0\}$$

eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit, und die letzten $n-k$ Spalten von $J_{f \circ P^{-1}}(Pa)$ sind linear unabhängig. Also existiert F wie behauptet mit

$$F(P(M) \cap U) = V \cap E_k \,,$$

das heißt, $F \circ P$ leistet das Verlangte.
"(ii)$\Rightarrow$(iii)": Seien F, U, V wie in (ii) gegeben. Wir setzen

$$T = \{\xi : \xi \in \mathbb{R}^k, \, (\xi, 0) \in V\} \,, \quad \Phi(\xi) = F^{-1}(\xi, 0) = \begin{pmatrix} \xi \\ g(\xi) \end{pmatrix} \,.$$

Dann ist $\Phi : T \to M \cap U$ bijektiv, $\Phi^{-1} = F|(M \cap U)$ stetig, und

$$J_\Phi(\xi) = \begin{pmatrix} I \\ J_g(\xi) \end{pmatrix} \,,$$

und es gilt offensichtlich $\operatorname{rang}(J_\Phi(\xi)) = k$.
"(iii)$\Rightarrow$(i)": Sei $a \in M$, seien U, T, Φ wie in (iii) gegeben. Wir setzen $c = \Phi^{-1}(a) \in T$ und betrachten den Spezialfall, dass die ersten k Zeilen von $J_\Phi(c)$ linear unabhängig sind. (Der allgemeine Fall wird wie oben durch eine geeignete Permutation darauf zurückgeführt.) Nach dem Satz über inverse Funktionen gibt es offene Mengen $\hat{T}, \hat{V} \subset \mathbb{R}^k$ mit $c \in \hat{T} \subset T$, so dass

$$\hat{\Phi} = (\Phi_1, \ldots, \Phi_k) : \hat{T} \to \hat{V}$$

ein C^α-Diffeomorphismus ist. Wir definieren

$$G : \hat{T} \times \mathbb{R}^{n-k} \to \hat{V} \times \mathbb{R}^{n-k}\,, \quad G(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + (0, \eta)\,.$$

Es ist

$$J_G(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} J_{\hat{\Phi}}(\xi) & 0 \\ * & I \end{pmatrix}\,, \quad \xi \in \hat{T}\,, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-k}\,,$$

also ist J_G invertierbar auf $\hat{T} \times \mathbb{R}^{n-k}$. Wir zeigen, dass G bijektiv ist auf $\hat{T} \times \mathbb{R}^{n-k}$. Es gilt

$$\begin{aligned} G(\xi,\eta) = G(\xi',\eta') \quad &\Rightarrow \quad \Phi(\xi) + (0,\eta) = \Phi(\xi') + (0,\eta') \quad \Rightarrow \quad \hat{\Phi}(\xi) = \hat{\Phi(\xi')} \\ &\Rightarrow \quad \xi = \xi' \quad \Rightarrow \quad \eta = \eta'\,, \end{aligned}$$

also ist G injektiv. Sei nun $(y, z) \in \hat{V} \times \mathbb{R}^{n-k}$. Es ist

$$(y,z) = \Phi(\xi) + (0,\eta)\,,$$

wenn wir $\xi = \hat{\Phi}^{-1}(y)$ setzen und η so definieren, dass die Gleichung erfüllt ist. Also ist G auch surjektiv und damit

$$G : \hat{T} \times \mathbb{R}^{n-k} \to \hat{V} \times \mathbb{R}^{n-k}$$

ein C^α-Diffeomorphismus. Wir setzen

$$\hat{U} = (\hat{V} \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap U\,,$$

und zerlegen

$$G^{-1} = (\hat{f}, f)\,, \quad \hat{f} : \hat{U} \to \hat{T}\,, \quad f : \hat{U} \to \mathbb{R}^{n-k}\,.$$

Dann gilt für alle $x \in \hat{U}$

$$x \in M \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \xi \in \hat{T}\,,\, \Phi(\xi) = x \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \xi \in \hat{T}\,,\, G^{-1}(x) = (\xi, 0) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0\,,$$

also ist

$$M \cap \hat{U} = \{x :\, x \in \hat{U},\, f(x) = 0\}\,.$$

Da $J_{G^{-1}}(x)$ invertierbar ist für alle $x \in \hat{U}$, hat $J_f(x)$ maximalen Rang, also $\operatorname{rang}(J_f(x)) = n - k$ für alle $x \in \hat{U}$. □

Definition 7.4 (Karte, Atlas)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $\Phi : T \to M \cap U$ mit den in Satz 7.3(iii) genannten Eigenschaften heißt C^α-Karte (oder einfach Karte) von M. Eine Familie $(\Phi_j)_{j\in J}$ von Karten $\Phi_j : T_j \to M \cap U_j$ heißt Atlas von M, falls

$$M \subset \bigcup_{j \in J} (M \cap U_j)\,.$$

□

Aus Satz 7.3 folgt unmittelbar, dass jede Mannigfaltigkeit einen Atlas besitzt. Ist M kompakt, so besitzt M einen endlichen Atlas (d.h. einen Atlas mit einer endlichen Indexmenge J).

Satz 7.5 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit, seien $\Phi_j : T_j \to M \cap U_j$, $j = 1, 2$, C^α-Karten von M, sei $M \cap U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Dann sind*

$$W_j = \Phi_j^{-1}(M \cap U_1 \cap U_2) \tag{7.12}$$

offene Teilmengen von $\mathbb{R}^k$ mit $W_j \subset T_j$, und

$$\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : W_1 \to W_2 \tag{7.13}$$

ist ein C^α-Diffeomorphismus. Die Abbildung $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ heißt Kartenwechsel.

Beweis: Nach Konstruktion gilt $W_j \subset T_j$ für $j = 1, 2$, und $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : W_1 \to W_2$ ist bijektiv. Wir zeigen nun, dass W_j offen ist, indem wir die Annahme $W_j \cap \partial W_j \neq \emptyset$ zum Widerspruch führen. Sei $t \in W_j \cap \partial W_j$. Dann gibt es eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^k$ mit $t_n \to t$ und $t_n \notin W_j$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für hinreichend großes n gilt dann $\Phi_j(t_n) \in U_1 \cap U_2$ (da $\Phi_j(t) \in U_1 \cap U_2$, Φ_j stetig und U_1, U_2 offen) und außerdem $t_n \in T_j$, (da $t \in T_j$ und T_j offen). Es folgt $\Phi_j(t_n) \in U_1 \cap U_2 \cap M$, also $t_n \in W_j$, ein Widerspruch. Also ist $W_j \cap \partial W_j = \emptyset$ und damit W_j offen. Wir zeigen nun, dass $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ ein C^α-Diffeomorphismus ist. Es genügt zu zeigen, dass $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 \in C^\alpha(W_1; \mathbb{R}^k)$. Sei $c_1 \in W_1$ beliebig. Wir setzen $a = \Phi_1(c_1)$. Gemäß Satz 7.3(ii) wählen wir eine offene Menge $U \subset U_1 \cap U_2$ mit $a \in U$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ und eine Abbildung $F : U \to V$ mit $F(M \cap U) = V \cap E_k$. Wir setzen

$$\hat{W}_j = \Phi_j^{-1}(M \cap U)\,.$$

Dass $\hat{W}_j$ offen ist, zeigt man genauso wie oben für W_j. Es ist

$$\begin{aligned} F \circ \Phi_1 : \hat{W}_1 \to \mathbb{R}^n\,, &\quad F \circ \Phi_1 = (g_1, \ldots, g_k, 0, \ldots, 0)\,, \\ F \circ \Phi_2 : \hat{W}_2 \to \mathbb{R}^n\,, &\quad F \circ \Phi_2 = (h_1, \ldots, h_k, 0, \ldots, 0)\,. \end{aligned}$$

Sei $g = (g_1, \ldots, g_k)$, $h = (h_1, \ldots, h_k)$. Es ist

$$\operatorname{rang} J_F = n\,, \qquad \operatorname{rang} J_{\Phi_j} = k\,,$$

also

$$\operatorname{rang} J_{F \circ \Phi_j} = k\,,$$

also

$$\operatorname{rang} J_g = \operatorname{rang} J_h = k\,.$$

Hieraus folgt mit dem Satz über inverse Funktionen, dass es Umgebungen $\tilde{W}_j \subset \hat{W}_j$ von $c_j = \Phi_j^{-1}(a)$ gibt, so dass

$$g : \tilde{W}_1 \to g(\tilde{W}_1)\,, \quad h : \tilde{W}_2 \to h(\tilde{W}_2)\,,$$

C^α-Diffeomorphismen sind, und dass

$$\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 = h^{-1} \circ g\,, \quad \text{auf } \tilde{W}_1\,.$$

Da $c_1 \in W_1$ beliebig war, folgt $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 \in C^\alpha(W_1; \mathbb{R}^k)$. □

Satz 7.5 besagt, dass alle Kartenwechsel C^α-Diffeomorphismen sind. Hieraus läßt sich eine allgemeinere Definition einer Mannigfaltigkeit M gewinnen, die nicht mehr von vorneherein als Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ gegeben ist. Solche sogenannten *differenzierbaren Mannigfaltigkeiten* werden in der Differentialtopologie untersucht.

Um zum Begriff des Oberflächenintegrals zu kommen, befassen wir uns noch einmal mit der Fläche eines Parallelogramms. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, sei P das aufgespannte Parallelogramm

$$P = \{\lambda x + \mu y : \lambda, \mu \in [0,1]\}.$$

Der 2-dimensionale Inhalt (Flächeninhalt) ist

$$F(P) = \|x\| \, \|y\| \sin\varphi ,$$

wobei φ der Winkel zwischen x und y ist. Sei $A \in \mathbb{R}^{n,2}$ die Matrix mit den Spalten x und y. Dann gilt

$$A^T A = \begin{pmatrix} x^T \\ y^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^T x & x^T y \\ y^T x & y^T y \end{pmatrix},$$

und

$$\begin{aligned} \det(A^T A) &= (x^T x)(y^T y) - (x^T y)(y^T x) = \|x\|^2 \, \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2 \\ &= \|x\|^2 \, \|y\|^2 (1 - \cos^2\varphi) = F(P)^2 , \end{aligned}$$

also

$$F(P) = \sqrt{\det A^T A} .$$

Definition 7.6 (Maßtensor, Gramsche Determinante)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit, sei $\Phi : T \to M \cap U$ eine Karte von M, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $T \subset \mathbb{R}^k$ offene Mengen sind. Wir definieren $G : T \to \mathbb{R}^{(k,k)}$ und $g : T \to \mathbb{R}$ durch

$$G(t) = J_\Phi(t)^T J_\Phi(t) , \quad g(t) = \det G(t) . \tag{7.14}$$

G heißt der Maßtensor, g die Gramsche Determinante von M. □

Definition 7.7 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit, sei $f : M \to [-\infty, \infty]$. f heißt messbar auf M, falls $f \circ \Phi$ messbar ist für jede C^α-Karte $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$, wobei $T \subset \mathbb{R}^k$ offen ist.* □

Definition 7.8 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit, sei $f : M \to [-\infty, \infty]$. f heißt integrierbar über M bezüglich der Karte $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$, falls $f \circ \Phi$ messbar ist und falls die durch*

$$t \mapsto f(\Phi(t)) \sqrt{g(t)} \tag{7.15}$$

definierte Funktion über T integrierbar ist bezüglich des k-dimensionalen Lebesgue-Maßes λ^k. In diesem Fall definieren wir

$$\int_{\Phi(T)} f(\xi) \, dS(\xi) = \int_T f(\Phi(t)) \sqrt{g(t)} \, d\lambda^k(t) . \tag{7.16}$$

□

Das folgende Lemma zeigt, dass das Integral auf der linken Seite von (7.16) nur von der Menge $\Phi(T)$, nicht aber von der Wahl von Φ abhängt, und dass also Definition 7.8 sinnvoll ist.

Lemma 7.9 *Sind $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$ und $\hat{\Phi} : \hat{T} \to \mathbb{R}^n$ Karten mit $\Phi(T) = \hat{\Phi}(\hat{T})$, so ist f integrierbar über M bezüglich Φ genau dann, wenn f integrierbar ist über M bezüglich $\hat{\Phi}$, und es gilt*

$$\int_T f(\Phi(t))\sqrt{g(t)}\,d\lambda^k(t) = \int_{\hat{T}} f(\hat{\Phi}(t))\sqrt{\hat{g}(t)}\,d\lambda^k(t)\,. \tag{7.17}$$

Beweis: Wir definieren $\Psi : \hat{T} \to T$ durch $\Psi = \Phi^{-1} \circ \hat{\Phi}$. Nach Satz 7.5 ist Ψ ein C^α-Diffeomorphismus. Sei nun f integrierbar über M bezüglich Φ. Dann ist $f \circ \Phi$ messbar, also auch $f \circ \hat{\Phi} = f \circ \Phi \circ \Psi$. Aus der Substitutionsregel (Satz 6.13) folgt, dass die Funktion

$$s \mapsto f(\Phi(\Psi(s))\sqrt{g(\Psi(s))}|\det J_\Psi(s)|$$

auf $\hat{T}$ integrierbar ist, und dass gilt

$$\int_T f(\Phi(t))\sqrt{g(t)}\,d\lambda^k(t) = \int_{\hat{T}} f(\Phi(\Psi(s)))\sqrt{g(\Psi(s))}|\det J_\Psi(s)|\,d\lambda^k(s)\,.$$

Es ist $\hat{\Phi} = \Phi \circ \Psi$, also

$$J_{\hat{\Phi}}(s) = J_\Phi(\Psi(s))J_\Psi(s)\,,$$

also

$$\begin{aligned}
\hat{g}(s) &= \det(J_{\hat{\Phi}}(s)^T J_{\hat{\Phi}}(s)) = \det(J_\Psi(s)^T J_\Phi(\Psi(s))^T J_\Phi(\Psi(s))J_\Psi(s)) \\
&= \det(J_\Psi(s)^T)\det(J_\Phi(\Psi(s))^T J_\Phi(\Psi(s)))\det(J_\Psi(s)) \\
&= g(\Psi(s))(\det J_\Psi(s))^2\,,
\end{aligned}$$

also

$$\int_T f(\Phi(t))\sqrt{g(t)}\,d\lambda^k(t) = \int_{\hat{T}} f(\hat{\Phi}(s))\sqrt{\hat{g}(s)}\,d\lambda^k(s)\,.$$

□

Definition 7.10 (Zerlegung der Eins)
Sei M eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, sei $(\Phi_j)_{1\le j\le N}$ ein endlicher Atlas von M mit den Karten $\Phi_j : T_j \to M \cap U_j$. Eine Familie $(\alpha_j)_{1\le j\le N}$ von Funktionen $\alpha_j : M \to \mathbb{R}$ heißt ***messbare Zerlegung der Eins*** *für den Atlas $(\Phi_j)_j$, falls gilt:*

(i) α_j *ist auf* M *messbar für alle* j,

(ii) $0 \le \alpha_j \le 1$, *für alle* j,

(iii) $\alpha_j(x) = 0$ *für alle* $x \notin U_j$,

(iv)

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j(x) = 1\,, \quad \text{für alle } x \in M.$$

$\square$

Definition 7.11 (Oberflächenintegral)
Sei M eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$. Ein $f : M \to [-\infty, \infty]$ heißt integrierbar über M, falls es einen endlichen Atlas $(\Phi_j)_{1\le j\le N}$, $\Phi_j : T_j \to M \cap U_j$, gibt, so dass f integrierbar ist über M bezüglich aller Karten Φ_j, $1 \le j \le N$. In diesem Fall definieren wir das Oberflächenintegral von f über M als

$$\int_M f(\xi)\, dS(\xi) = \sum_{j=1}^N \int_{\Phi_j(T_j)} \alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi)\,, \tag{7.18}$$

wobei $(\alpha_j)_{1\le j\le N}$ eine messbare Zerlegung der Eins für $(\Phi_j)_{1\le j\le N}$ ist. $\square$

Das folgende Lemma zeigt, dass Definition 7.11 sinnvoll ist.

Lemma 7.12 *In der Situation von Definition 7.11 gilt:*

(i) Jeder endliche Atlas $(\Phi_j)_{1\le j\le N}$ hat eine messbare Zerlegung der Eins $(\alpha_j)_{1\le j\le N}$.

(ii) Für alle i, j gilt: Ist f über M bezüglich Φ_j integrierbar, so auch $\alpha_i f$.

(iii) Der in (7.18) definierte Wert des Oberflächenintegrals hängt weder von der Wahl des Atlas noch von der Wahl der Zerlegung ab.

Beweis: Zum Beweis von (i) setzen wir für $\Phi_j : T_j \to M \cap U_j$

$$\alpha_j = 1_{W_j}\,, \quad W_j = (M \cap U_j) \setminus \bigcup_{i<j} (M \cap U_i)\,.$$

Zum Beweis von (ii) bemerken wir, dass $\alpha_i \circ \Phi_j : T_j \to \mathbb{R}$ messbar ist, und dass für alle $t \in T_j$ gilt

$$0 \le \alpha_i(\Phi_j(t)) |f(\Phi_j(t))| \sqrt{g_j(t)} \le |f(\Phi_j(t))| \sqrt{g_j(t)}\,,$$

also definiert der mittlere Ausdruck eine auf T_j integrierbare Funktion. Zum Beweis von (iii) betrachten wir einen weiteren endlichen Atlas

$$(\tilde\Phi_k)_{1\le k\le \tilde N}\,, \quad \tilde\Phi_k : \tilde T_k \to M \cap \tilde U_k\,,$$

für M mit messbarer Zerlegung

$$(\tilde\alpha_k)_{1\le k\le \tilde N}\,.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^N \int_{\Phi_j(T_j)} \alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi) &= \sum_{j=1}^N \int_{\Phi_j(T_j)} \sum_{k=1}^{\tilde N} \tilde\alpha_k(\xi) \alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi) \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{\tilde N} \int_{\Phi_j(T_j)} \tilde\alpha_k(\xi) \alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi)\,,\end{aligned}$$

und ebenso

$$\sum_{k=1}^{\tilde N} \int_{\tilde\Phi_k(\tilde T_k)} \tilde\alpha_k(\xi) f(\xi)\, dS(\xi) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{\tilde N} \int_{\tilde\Phi_k(\tilde T_k)} \tilde\alpha_k(\xi)\alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi)\,,$$

und für alle j, k gilt

$$\begin{aligned}\int_{\Phi_j(T_j)} \tilde\alpha_k(\xi)\alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi) &= \int_{\Phi_j(T_j)\cap\tilde\Phi_k(\tilde T_k)} \tilde\alpha_k(\xi)\alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi)\\ &= \int_{\tilde\Phi_k(\tilde T_k)} \tilde\alpha_k(\xi)\alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi)\,,\end{aligned}$$

da $\alpha_j\tilde\alpha_k = 0$ außerhalb von $\Phi_j(T_j)\cap\tilde\Phi_k(\tilde T_k)$. □

Ist K Teilmenge einer k-dimensionalen C^α-Mannigfaltigkeit M, so definieren wir

$$\int_K f(\xi)\, dS(\xi) = \int_M 1_K(\xi) f(\xi)\, dS(\xi)\,,$$

falls $1_K f$ über M integrierbar ist. Für $f = 1$ erhalten wir den k-dimensionalen Inhalt von K,

$$F(K) = \int_M 1_K(\xi)\, d\xi\,.$$

Ist

$$F(K) = 0\,,$$

so heißt K eine k-dimensionale Nullmenge in M. In diesem Fall gilt

$$\int_{M\setminus K} f(\xi)\, dS(\xi) = \int_M f(\xi)\, dS(\xi)\,,$$

falls f über M integrierbar ist.

Beispiel 7.13

(i) Kurvenlänge: Sei $T = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\Phi'(t) \neq 0$ für alle $t \in (a,b)$, $M = \Phi(T)$. Es ist dann

$$g(t) = G(t) = J_\Phi(t)^T J_\Phi(t) = (\Phi_1'(t), \dots, \Phi_n'(t)) \begin{pmatrix}\Phi_1'(t)\\ \vdots \\ \Phi_n'(t)\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \Phi_i'(t)^2\,, \tag{7.19}$$

$$\int_M 1\, dS(\xi) = \int_T 1\sqrt{g(t)}\, dt = \int_a^b \|\Phi'(t)\|_2\, dt\,. \tag{7.20}$$

Der 1-dimensionale Inhalt von M ist also gerade die Länge der Kurve Φ.

(ii) Rotationsflächen: Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sei $f > 0$. Dann ist

$$M = \{(x,y,z) : x \in (a,b),\ y^2 + z^2 = f(x)^2\} \tag{7.21}$$

eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$. Die durch

$$\Phi(t,s) = (t, f(t)\cos s, f(t)\sin s) \tag{7.22}$$

definierte Abbildung

$$\Phi : T = (a,b) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 \tag{7.23}$$

ist eine C^1-Karte von M, da

$$J_\Phi(t,s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(t)\cos s & -f(t)\sin s \\ f'(t)\sin s & f(t)\cos s \end{pmatrix} \tag{7.24}$$

den Rang 2 hat. Der Maßtensor von Φ ist

$$G(t,s) = J_\Phi(t,s)^T J_\Phi(t,s) = \begin{pmatrix} 1 + f'(t)^2 & 0 \\ 0 & f(t)^2 \end{pmatrix} . \tag{7.25}$$

Die Menge

$$M \setminus \Phi(T) = \{(t, f(t), 0) : \, t \in (a,b)\}$$

ist eine 2-dimensionale Nullmenge in M. Also ist

$$\int_M 1 \, dS(\xi) = \int_{\Phi(T)} 1 \, dS(\xi) = \int_T \sqrt{\det G(t,s)} \, d\lambda^2(t,s) \tag{7.26}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_a^b f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2} \, dt \, ds = 2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{1+f'(t)^2} \, dt \, . \tag{7.27}$$

(iii) Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$: Das ist ein Spezialfall von (ii) mit $(a,b) = (-1,1)$, $f(t) = \sqrt{1-t^2}$. Es ist

$$f'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \, ,$$

also gilt

$$\int_M 1 \, dS(\xi) = 2\pi \int_{-1}^1 f(t)\sqrt{1+f'(t)^2} \, dt = 2\pi \int_{-1}^1 1 \, dt = 4\pi \, .$$

(iv) Inhalt des Graphen einer Funktion: Sei $T \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $F : T \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar,

$$M = \{(t, F(t)) : t \in T\} \subset \mathbb{R}^n \, . \tag{7.28}$$

Die Abbildung

$$\Phi : T \to \mathbb{R}^n \, , \quad \Phi(t) = (t, F(t)) \, ,$$

ist C^1-Karte mit $\Phi(T) = M$. Es ist

$$J_\Phi(t) = \begin{pmatrix} I \\ \partial_1 F(t) \cdots \partial_{n-1} F(t) \end{pmatrix}$$

$$G(t) = J_\Phi(t)^T J_\Phi(t) = I + \begin{pmatrix} \partial_1 F(t) \\ \vdots \\ \partial_{n-1} F(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 F(t) & \cdots & \partial_{n-1} F(t) \end{pmatrix} \, ,$$

also (siehe Lemma 7.14 unten)

$$g(t) = \det G(t) = 1 + \|\mathrm{grad}\, F(t)\|_2^2 \,. \tag{7.29}$$

Der $(n-1)$-dimensionale Inhalt des Graphen von F ist also

$$\int_M 1 \, dS(\xi) = \int_T \sqrt{1 + \|\mathrm{grad}\, F(t)\|_2^2} \, dt \,. \tag{7.30}$$

□

Lemma 7.14 *Sei $a \in \mathbb{R}^m$, $I \in \mathbb{R}^{(m,m)}$ die Einheitsmatrix. Dann ist*

$$\det(I + aa^T) = 1 + \|a\|_2^2 \,, \quad aa^T = \begin{pmatrix} a_1 a_1 & \cdots & a_1 a_m \\ \vdots & & \vdots \\ a_m a_1 & \cdots & a_m a_m \end{pmatrix} \tag{7.31}$$

Beweis: Sei $a \neq 0$ (sonst trivial). Wir berechnen die Eigenwerte von $I + aa^T$:

$$(I + aa^T)x = \lambda x \qquad \Leftrightarrow \qquad (a^T x) \cdot a = (\lambda - 1)x \,.$$

Es ist also a ein Eigenvektor zum Eigenwert $1 + \|a\|_2^2$, und jeder Vektor x mit $x \perp a$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 1. Wir erhalten also eine Basis aus Eigenvektoren mit den Eigenwerten

$$\lambda_1 = 1 + \|a\|_2^2 \,, \quad \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 1 \,,$$

also

$$\det(I + aa^T) = \prod_{i=1}^m \lambda_i = 1 + \|a\|_2^2 \,.$$

□

Satz 7.15 *Sei M eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, sei $r > 0$. Dann ist*

$$rM = \{rx : x \in M\} \tag{7.32}$$

ebenfalls eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$. Ist $f : rM \to [-\infty, \infty]$, so gilt

$$f \text{ integrierbar über } rM \quad \Leftrightarrow \quad x \to f(rx) \text{ integrierbar über } M \,, \tag{7.33}$$

und in diesem Fall ist

$$\int_{rM} f(\xi) \, dS(\xi) = r^k \int_M f(r\xi) \, dS(\xi) \,. \tag{7.34}$$

Beweis: Ist $\Phi : T \to U \cap M$ Karte für M, so ist

$$\tilde{\Phi} : T \to rU \cap rM \,, \quad \tilde{\Phi}(t) = r\Phi(t) \,,$$

Karte für rM. Die erste Behauptung folgt nun aus Satz 7.3. Zum Beweis von (7.33) und (7.34) bemerken wir, dass

$$\tilde{g}(t) = \det(J_{\tilde{\Phi}}(t)^T J_{\tilde{\Phi}}(t)) = \det(r^2 J_\Phi(t)^T J_\Phi(t)) = r^{2k} g(t) \,,$$

also gilt für jede Karte

$$\int_T f(\tilde{\Phi}(t)) \sqrt{\tilde{g}(t)} \, dt = \int_T f(r\Phi(t)) r^k \sqrt{g(t)} \, dt \,.$$

Summation über eine Zerlegung der Eins liefert die Behauptung. □