SS 06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

**Algebra II**

# 1. Übungsblatt

**Aufgabe 1:** Sei $R$ ein nullteilerfreier Ring und $V$ ein $R$-Modul. Es sei

$$V_{\mathrm{tor}} := \{\, v \in V \mid \exists a \in R - \{0\} : av = 0 \,\}$$

der *Torsionsmodul* von $V$ und

$$\mathrm{Ann}(V) := \{\, a \in R \mid av = 0 \ \ \forall v \in V \,\}$$

der *Annihilator* von $V$. Zeigen Sie:

(a) $V_{\mathrm{tor}}$ ist ein Untermodul von $V$.

(b) $\mathrm{Ann}(V)$ ist ein Ideal von $V$.

(c) Bestimmen Sie Torsionmodul und Annihilator für den $\mathbb{Z}$-Modul

$$V = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/4.$$

**Aufgabe 2:** Ein $R$-Modul $V$ heisst *einfach*, wenn es nicht der Nullmodul ist und keinen echten Untermodul besitzt. Zeigen Sie:

(a) Jeder einfache Modul ist isomorph zu $R/\mathfrak{m}$, wobei $\mathfrak{m} \lhd R$ ein maximales Ideal ist.

(b) Sei $\varphi : V \to W$ ein Homomorphismus zwischen zwei einfachen $R$-Moduln. Dann ist $\varphi$ entweder null oder ein Isomorphismus.

(c) Sei $V$ ein beliebiger $R$-Modul und $\mathrm{End}_R(V)$ die Menge aller Endomorphismen $\varphi : V \to V$. Versehen Sie $\mathrm{End}_R(V)$ mit der Struktur eines Ringes. Ist $V$ einfach, so ist $\mathrm{End}_R(V)$ ein Körper.

**Aufgabe 3:** Sei $V := \mathbb{Z}^2$ der freie Standard-$\mathbb{Z}$-Modul vom Rang zwei und $\varphi : V \to V$ der durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

gegebene Endomorphismus von $V$.

(a) Bestimmen Sie invertierbare Matrizen $P, Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ so, dass

$$QAP^{-1} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

mit $d_1 | d_2$. Hätte man die Elementarteiler $d_1, d_2$ vorhersehen können?

(b) Bestimmen Sie Basen $(v_1, v_2)$ und $(w_1, w_2)$ von $V$ so, dass $\varphi(v_i) = d_i w_i$.

(c) Nun ersetzen Sie $\mathbb{Z}$ durch den Ring $\mathbb{C}[x]$ und $A$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^2 - x & x^2 + 1 \\ x^2 & x^3 - 2x \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 4:** Ergänzen Sie den Vektor $v = (6, 15, 10)$ zu einer Basis von $\mathbb{Z}^3$. Berechnen Sie die Determinante dieser Basis (d.h. der Matrix, deren Spalten die Basisvektoren sind).

**Aufgabe 5:** Sei $V$ der $\mathbb{Z}$-Modul mit Erzeugern $v_1, v_2, v_3$ und Relationen

$$\begin{aligned} 3v_1 + 5v_2 - 2v_3 &= 0, \\ -v_1 + 6v_2 + 3v_1 &= 0. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine Basis von $V/V_{\mathrm{tor}}$, die Elementarteiler $d_i$ von $V$ und einen Isomorphismus

$$V_{\mathrm{tor}} \cong \bigoplus_i \mathbb{Z}/d_i.$$

**Abgabe:** am Dienstag, den 9.5. in der Übung.