SS 06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

Algebra II

10. Übungsblatt

Aufgabe 1: Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{char}(k) \neq 2$, $f \in k[x]$ ein nicht konstantes Polynom,

$$V = \mathrm{Z}(y^2 - f(x)) \subseteq \mathbb{A}^2 \,,$$
$$R = k[V] = k[x, y \mid y^2 = f(x)] \,.$$

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) f hat keine mehrfachen Nullstellen,

(b) $\mathrm{ggT}(f, f') = 1$, (wobei $f' = \frac{\partial f}{\partial x}$),

(c) V ist glatt,

(d) R ist ganzabgeschlossen.

Welche dieser Implikationen ist auch gültig für $\mathrm{char}(k) = 2$?

Aufgabe 2: Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $F \in k[X, Y]$ irreduzibel,

$$V = \mathrm{Z}(F) \subseteq \mathbb{A}^2$$

$P = (x_0, y_0) \in V$, $R := \mathcal{O}_{V,p}$, $\mathfrak{m} \lhd R$ das maximale Ideal.

(a) Zeigen Sie: P ist ein glatter Punkt von $V \iff \dim_k(\mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}) = k$

(b) Im Fall $F = Y^2 - X^3$, $P = (0, 0)$ bestimmen Sie:
$$\dim_k(\mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1})$$

Aufgabe 3: Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Zeigen Sie:

(a) R ist ganzabgeschlossen,

(b) R ist nicht faktoriell. (Hinweis:

 (i) $2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5})$

 (ii) betrachte die Norm $\mathrm{N} : R \to \mathbb{Z}$.)

(c) $\mathfrak{p}_{2,\pm} = (2, 1 \pm \sqrt{-5})$, $\mathfrak{p}_{3,\pm} = (3, 1 \pm \sqrt{-5})$ sind Primideale von R.

(d) $(2) = \mathfrak{p}_{2,+} \cdot \mathfrak{p}_{2,-}$; $(3) = \mathfrak{p}_{3,+} \cdot \mathfrak{p}_{3,-}$.

Abgabe: am Mittwoch, dem 12.7.2006, in der Übung.