SS 06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

Algebra II

11. Übungsblatt

Aufgabe 1: Sei $d < 0$, quadratfrei und $d \equiv 2, 3 \pmod 4$. Setze $\delta := \sqrt{d}$, $K := \mathbb{Q}[\delta]$, $\mathcal{O}_K := \mathbb{Z}[\delta]$. Zeigen Sie:

(a) $(2) = (2, 1+\delta) \cdot (2, 1-\delta)$ ist die Zerlegung von (2) in Primideale.

(b) $(2, 1+\delta)$, $(2, 1-\delta)$ sind *keine* Hauptideale, falls $d \neq -1$.

Aufgabe 2: Sei $d < 0$ quadratfrei, $d \equiv 1 \pmod 4$. Setze $\delta := \frac{1+\sqrt{d}}{2}$, $K := \mathbb{Q}[\delta]$, $\mathcal{O}_K := \mathbb{Z}[\delta]$, $a := \frac{1-d}{4}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(x + y\delta) = x^2 + xy + ay^2$ (für x, $y \in \mathbb{Q}$).

(b) Das Minimalpolynom von δ ist $f(x) = x^2 - x + a$.

(c) Sei p eine Primzahl. Dann sind äquivalent:

   (i) $f(x)$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

   (ii) $\exists$ Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathrm{N}(\mathfrak{p}) = p$

Aufgabe 3: Sei $d = -67$, $\delta = \frac{1+\sqrt{-67}}{2}$, $K = \mathbb{Q}[\delta]$, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\delta]$. Zeigen Sie:

(a) Sei p eine Primzahl:

$$(p) \lhd \mathcal{O}_K \text{ Primideal } \iff f(x) = x^2 - x + 17 \text{ irreduzibel über } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

(b) $Cl(K)$ wird von den Primidealen erzeugt mit der Norm ≤ 5
(Hinweis: Satz 10.2 der Vorlesung).

(c) $Cl(K) = \{\overline{\mathcal{O}_K}\}$.

(d) Für eine Primzahl p gilt:

$$x^2 + xy + 17y^2 = p \text{ hat eine Lösung } (x, y) \in \mathbb{Z}^2$$
$$\iff f(x) = x^2 - x + 17 \text{ hat eine Nullstelle in } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$
$$\left(\iff \left(\frac{67}{p}\right) = 1 \text{ für } p \neq 2,\, 67\right).$$

(Hinweis: Aufgabe 2)

Abgabe: am Mittwoch, dem 19.7.2006, in der Übung.