SS 06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

Algebra II

2. Übungsblatt

Aufgabe 1: Sei V ein R-Modul, $\pi_1, \pi_2 : V \to V$ Endomorphismen von V mit:

(a) $\pi_i \circ \pi_i = \begin{cases} \pi_i & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$

(b) $\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{Id}_V$

Sei $V_i := \pi_i(V)$, $i = 1, 2$. Zeigen Sie:

$$V = V_1 \oplus V_2$$

Aufgabe 2:

(a) Sei R nullteilerfreier Ring und V ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gilt:

$$V = V_{\mathrm{tor}} \iff \mathrm{Ann}(V) \neq \{0\}$$

(b) Sei p eine Primzahl und V der $\mathbb{Z}$-Modul

$$V := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ann}(V) = \{0\}$.

Aufgabe 3:

(a) Sei R ein Ring, $I_1, I_2 \lhd R$ zwei Ideale mit

$$I_1 + I_2 = R\,.$$

Sei $I := I_1 \cap I_2$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} R/I &\to R/I_1 \times R/I_2 \\ a + I &\mapsto (a + I_1, a + I_2) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von R-Moduln ist.

(b) Sei V ein R-Modul, $I \cdot V = \left\{ \sum a_i v_i \mid a_i \in I,\ v_i \in V \right\}$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} V/(I \cdot V) &\to V/(I_1 \cdot V) \times V/(I_2 \cdot V) \\ v &\mapsto (v + I_1 V, v + I_2 V) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von R-Moduln ist.

Aufgabe 4: Sei V der $\mathbb{Z}$-Modul mit Präsentation:

$$V = \left\langle v_1, v_2 \;\middle|\; \begin{array}{c} 7v_1 + v_2 = 0, \\ 11v_1 + 5v_2 = 0 \end{array} \right\rangle.$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Ann}(V) = 24\mathbb{Z}$

(b) Bestimmen Sie Erzeuger von V_2 und V_3.

(c) Schreiben Sie v_1, v_2 in der Form $w_2 + w_3$, $w_p \in V_p$.

Abgabe: am Dienstag, dem 16.5.2006, in der Übung.