SS 06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

Algebra II

3. Übungsblatt

Aufgabe 1: Sei R ein Hauptidealring, $a_1, \ldots, a_r \in R$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Ann}\Big(R/(a_1) \times \cdots \times R/(a_r)\Big) = \mathrm{kgV}(a_1, \ldots, a_r)$$

Aufgabe 2: Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $v_1, \ldots, v_n$ und $\varphi : V \to V$ ein K-linearer Endomorphismus mit $\varphi(v_j) = \sum_i a_{ij} v_i$, $A := (a_{ij})$.

Wir fassen V als $K[x]$-Modul auf:

$$x \cdot v := \varphi(v)\,.$$

Es sei $R := x \cdot I_n - A$ mit Spalten $R_j := (x \cdot \delta_{ij} - a_{ij})_{i=1,..,n}$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie:

Die Spalten R_j von R erzeugen alle Relationen zwischen den Erzeugern $v_1, \ldots, v_n$, d.h.:

Sind $g_1, \ldots, g_n \in K[x]$ gegeben mit $\sum g_i v_i = 0$, so gibt es $h_1, \ldots, h_n \in K[x]$ mit $g_i = \sum_j h_j \cdot (x \cdot \delta_{ij} - a_{ij}), i = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 3: Sei A eine $n \times n$-Matrix über einem Körper K mit $A^2 = A$. Zeigen Sie: A ist diagonalisierbar.

Aufgabe 4: Sei A eine 5×5-Matrix über $\mathbb{Q}$ mit charakterischem Polynom $c_A(x) = (x+2)^2(x-3)^3$. Finden Sie alle möglichen Jordan-Normalformen von A.

Aufgabe 5:

(a) Bestimmen Sie die rationale Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 1 & 7 & -8 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Q}$.

(b) Zeigen Sie: A ist über $\mathbb{Q}$ ähnlich zu der Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Abgabe: am Dienstag, dem 23.5.2006, in der Übung.