SS 06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

Algebra II

4. Übungsblatt

Aufgabe 1: Sei $R = \mathbb{R}[X,Y] = \mathbb{R}[\mathbb{A}^2]$ der Polynomring, aufgefasst als Koordinatenring der reellen affinen Ebene

$$\mathbb{A}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Für die folgenden Teilmengen $V \subseteq \mathbb{A}^2$, bestimmen Sie (und skizzieren Sie)

- das Ideal $I(V) = \{f \in R \mid f(a) = 0 \; \forall a \in V\}$ und
- die Menge $\overline{V} = Z(I) = \{a \in \mathbb{A}^2 \mid f(a) = 0 \; \forall f \in I\}$:

(a) $V = \{(1,3), (-2,5), (0,0)\}$

(b) $V = \{(cos(t), sin(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$

(c) $V = \{(t,0) \mid t \in [0,1]\}$

(d) $V = \{(t, sin(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$

(e) $V = \{(t^2+1, t^3) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 2: Sei $R = \mathbb{Z}[X]$, $I = \langle g_1, g_2 \rangle$, mit

$$g_1 = 9X^4 - 10X^3 + 6X^2 - 5X + 1\,,$$

$$g_2 = 2X^3 - 9X^2 + X - 3\,.$$

(a) Bestimmen Sie einen Erzeuger $a_4 \in \mathbb{Z}$ des Ideals

$$J = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists f = aX^n + \cdots \in I\}$$

und ein Polynom

$$f_4 = a_4 X^n + \cdots \in I\,.$$

(b) Für $d \in \{1,2,3\}$ bestimmen Sie einen Erzeuger a_d des Ideals

$$J_d = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists f = aX^d + \cdots \in I\}$$

und ein Polynom

$$f_d = a_d X^d + \cdots \in I\,.$$

(c) Schreiben Sie g_1, g_2 als Linearkombination von $f_1, \ldots, f_4$.

(d) Liegt das Polynom
$$h = X^4 + 1$$
in I.

Aufgabe 3: Sei
$$R = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$
und
$$I = \{f \in \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}.$$
Zeigen Sie

(a) I ist ein maximales Element von R,

(b) I ist *nicht* endlich erzeugt.

Abgabe: am Dienstag, dem 30.5.2006, in der Übung.