SS 06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

**Algebra II**

# 5. Übungsblatt

**Aufgabe 1:** Sei $\mathbb{A}^n$ der affine Raum der Dimension $n$ (über einem Körper $k$). Zeigen Sie:

(a) Jede absteigende Kette

$$\mathbb{A}^n \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots$$

von affinen algebraischen Mengen in $\mathbb{A}^n$ wird stationär.

(b) Jede affine algebraische Menge $V$ lässt sich als Vereinigung von endlich vielen *irreduziblen* algebraischen Mengen schreiben:

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_r \,.$$

(Hinweis: benutze Teil (a)).

(c) Sei $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$ eine Zerlegung wie in Teil (b) und $W \subseteq V$ eine *irreduzible* algebraische Teilmenge. Dann gilt $W \subseteq V_i$ für ein $i$.

(d) Gilt $V_i \not\subseteq V_j$ für $i \neq j$ in Teil (c), so ist die Menge (der *irreduziblen Komponenten*) $\{V_i\}$ *eindeutig*.

**Aufgabe 2:** Sei $k$ ein Körper, $V = \mathrm{Z}(\langle X^3 - Y^2 \rangle) \subseteq \mathbb{A}^n$. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1 & \to & V\,, \\ t & \mapsto & (t^2, t^3) \end{array} \right.$$

ist ein bijektiver Morphismus von algebraischen Varietäten. Ist diese Abbildung ein Isomorphismus?

**Aufgabe 3:** Sei $R$ ein faktorieller Ring, $f \in R$. $f = \prod p_i^{e_i}$ die Zerlegung in Primpotenzen. Dann gilt

$$\mathrm{rad}(\langle f \rangle) = \langle p_1 \cdot \dots \cdot p_r \rangle \,.$$

**Aufgabe 4:** Bestimmen Sie $\mathrm{Z}(I)$ und $\mathrm{rad}(I)$ für die folgenden Ideale $I \lhd R$:

(a)

$$R = \mathbb{C}[X,Y]\,,$$
$$I = \langle X^2Y - 2XY + Y + X^2 - 2X + 1 \rangle\,,$$

(b)

$$R = \mathbb{R}[X,Y]\,,$$
$$I = \langle X^2 - Y, X - Y - 1 \rangle\,,$$

(c)

$$R = \mathbb{C}[X,Y]\,,$$
$$I = \langle X^2 - Y, X - Y - 1 \rangle\,.$$

Hinweis: Nullstellensatz.

**Abgabe:** am Mittwoch, dem 7.6.2006, in der Übung.