SS 06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

Algebra II

6. Übungsblatt

Aufgabe 1: Sei R nullteilerfrei, $K = \mathrm{Quot}(R)$, L/K eine algebraische Erweiterung, S der ganze Abschluss von R in L.

Zeigen Sie:

$$\mathrm{Quot}(S) = L$$

Gilt dies auch noch ohne die Voraussetzung „L/K *algebraisch*"?

Aufgabe 2:

(a) Sei k ein Körper, $R := k[x, y \mid x^2 = y^3]$, $t := \frac{x}{y} \in K := \mathrm{Quot}(R)$.
Zeigen Sie: $k[t] \subseteq K$ ist der ganze Abschluss von R in K.

(b) Seien $n, m \in \mathbb{N}_{>1}$, $(n, m) = 1$.

$$R := k[x, y \mid x^n = y^m]$$

Bestimmen Sie den ganzen Abschluss von R in $K := \mathrm{Quot}(R)$.

Aufgabe 3: Sei $\zeta := e^{2\pi i/5}$, $K = \mathbb{Q}[\zeta]$. Bestimmen Sie für die folgenden Elemente $\alpha \in K$, ob sie ganze algebraische Zahlen sind. Wenn ja, berechnen Sie die Diskriminante der Ordnung $\mathbb{Z}[\alpha]$ und bestimmen Sie, ob $\mathbb{Z}[\alpha]$ ganz abgeschlossen ist.

(a) $\alpha = 2\zeta + 1$,

(b) $\alpha = \zeta + 2$,

(c) $\alpha = \zeta^2 - \frac{1}{2}$

Aufgabe 4: Seien V, W affine algebraische Mengen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k, $\varphi : V \to W$ ein Morphismus.

(a) Zeigen Sie: Ist φ surjektiv, so ist $\varphi^* : k[W] \to k[V]$ injektiv.

(b) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die Umkehrung von (a) nicht gilt.

Abgabe: am Mittwoch, dem 14.6.2006, in der Übung.