SS 06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

Algebra II

7. Übungsblatt

Aufgabe 1: Sei $\zeta := e^{2\pi i/5}$, $K := \mathbb{Q}(\zeta)$, $\lambda := \zeta - 1$.

(a) Berechne $\frac{5}{\lambda^4}$, $\frac{\lambda^4}{5}$ in der Form $\sum\limits_{i=0}^{4} a_i\zeta^i$

(b) Finden Sie $a \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathcal{O}_K$ mit

$$\zeta + \zeta^2 = a + \lambda\alpha$$

Aufgabe 2: Sei K ein Körper, $f(X)$ ein irreduzibles, separables Polynom, $\alpha \in \overline{K}$ eine Nullstelle und $L = K[\alpha]$. Sei D die Diskriminante von f.

(a) Dann gilt

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} N_{L/K}(f'(\alpha))\,.$$

(b) Berechnen Sie mit obiger Formel die Diskriminante von $f(X) = X^3+X+1$.

(c) Gilt $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$?

Aufgabe 3: Sei $R = \mathbb{C}[X, Y \mid Y^3 = X^3 + 1]$. Bestimmen Sie, für welche Werte $a, b \in \mathbb{C}$ gilt:

$$R/\mathbb{C}[t] \text{ ist endlich, wobei } t := ax + by\,.$$

Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

Aufgabe 4: Sei $k := \mathbb{F}_p$, $K := k(x)$ (x transzendent über k) und $L = K[y]$, y Nullstelle von

$$Y^p + x^2 + 1 = 0\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass es eine p-te Wurzel von x in L gibt: $\sqrt[p]{x} \in L$.

(b) Zeigen Sie: $B := k[x, y] \subseteq L$ ist nicht ganz abgeschlossen.

(c) Bestimmen Sie den ganzen Abschluss von $R := k[x]$ in L.

Hinweis: $(a + b)^p = a^p + b^p$.

Abgabe: am Mittwoch, dem 21.6.2006, in der Übung.