SS 06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

Algebra II

8. Übungsblatt

Aufgabe 1: Sei k algebraisch abgeschlossener Körper und $R := k[\mathbb{A}^n] = k[X_1, \dots, X_n]$, $K := \mathrm{Quot}(R)$. Sei $f \in K \setminus \{0\}$. Für $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ sei $\mathfrak{m}_a := (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$. Zeigen Sie:

(a) $I(f) := \{h \in R \mid h \cdot f \in R\}$ ist ein Ideal von R,

(b) $I(f) \subseteq \mathfrak{m}_a \iff f \notin R_{\mathfrak{m}_a} \iff f$ ist *nicht* regulär in a,

(c) $I(f)$ ist ein Hauptideal (Hinweis: R ist faktoriell)

(d) Sei $n > 1$. Dann gilt: f regulär für alle $a \neq (0, \dots, 0) \Rightarrow f \in R$. Ist das auch richtig für $n = 1$?

Aufgabe 2: Sei $R := k[x, y \mid xy = 0] = k[V]$, $V := \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid xy = 0\}$, $K = \mathrm{Quot}(R) = k(V)$. Sei

$$D := \{f \in R \mid f \text{ ist } \textit{kein} \text{ Nullteiler}\}$$

und

$$\mathrm{Quot}(R) := D^{-1}R$$

der totale Quotientenring von R.

(a) Bestimmen Sie D.

(b) Zeigen Sie:

$$\varphi : \begin{cases} D^{-1}R & \xrightarrow{\sim} k(x) \times k(y) \\ f & \mapsto (f(x,0), f(0,y)) \end{cases}$$

ist ein Isomorphismus. (Hinweis: betrachte $e_1 = \frac{x}{x-y}$, $e_2 = \frac{y}{y-x}$.)

(c) Zeigen Sie:

$$R = \{f \in D^{-1}R \mid \varphi(f) = (g, h),\ g \in k[x],\ h \in k[y],\ g(0) = h(0)\}.$$

(Hinweis: Jedes $f \in R$ hat eine eindeutige Darstellung

$$f = c_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x^i + \sum_{i=1}^{m} b_i y^i \text{ .)}$$

Aufgabe 3: Sei k ein Körper und $R = \{f \in k[t] \mid f(0) = f(1)\} \subseteq k[t]$.

(a) Zeigen Sie, dass
$$R = k[x, y]\,,$$
wobei
$$x = t^2 - t, \quad y = t^3 - t^2\,.$$

(b) Finden Sie die Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^2$ für die $R = k[V]$.

(c) Bestimmen Sie alle Punkte $a \in V$ für die $\mathcal{O}_{V,a}$ nicht ganzabgeschlossen ist.

Abgabe: am Mittwoch, dem 28.6.2006, in der Übung.