SS 06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

Algebra II

9. Übungsblatt

Aufgabe 1: Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper,

$$V := \{(x,y,z,w) \in \mathbb{A}^4 \mid xz = yw\} \subseteq \mathbb{A}^4\,,$$

$$R := k[V] = k[x,y,z,w \mid xz = yw]\,.$$

Ist $I \lhd R$ ein Ideal, so ist

$$Z(I) = \{a \in V \mid f(a) = 0 \text{ für alle } f \in I\}\,.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Ideale $\mathfrak{p}_1 := (y,z)$, $\mathfrak{p}_2 := (y,x) \lhd R$ sind Primideale.

(b) Es gilt $(y) = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \neq \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2$.

(c) $\mathfrak{p}_3 := \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ ist ebenfalls ein Primideal aber *nicht* maximal.

(d) Bestimmen Sie die Dimension von R und eine maximale Primidealkette $(\mathfrak{p}_i)$.

(e) Sei $f := \frac{x}{y} \in k(V)$ und

$$I_f := \{g \in R \mid f \cdot g \in R\} \lhd R\,.$$

Zeige:

(e) $Z(I_f) = Z(\mathfrak{p}_1)$.

(e) f ist regulär in $a \in V \iff a \notin Z(I_f)$.

(f) Zeige: Es gibt *keine* Darstellung von f in der Form

$$f = \frac{a}{b}, \quad a,b \in R\,,$$

so dass gilt:

„f regulär in $a \iff b(a) \neq 0$".

Aufgabe 2: Sei K ein Körper und $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ eine diskrete Bewertung:

(i) $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$,

(ii) $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ für $x \neq -y$,

(iii) v ist surjektiv.

Zeigen Sie:

(a) $R = \{x \in K^\times \mid v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$ ist ein Ring.

(b) Ist $v(x) > v(y)$, so gilt: $v(x+y) = v(y)$.

Aufgabe 3: Sei k ein Körper, $K = k(t) := \mathrm{Quot}(k[t])$.

$$v := \begin{cases} K^\times & \to \quad \mathbb{Z} \\ f = \frac{g}{h} & \mapsto \quad \deg(h) - \deg(g), \quad g, h \in k[t] \end{cases}$$

Zeige:

(a) v ist eine diskrete Bewertung,

(b) R_v ist die Lokalisierung von $k[t^{-1}]$ in (t^{-1}): $R_v = k[t^{-1}]_{(t^{-1})} \subseteq K$.

Abgabe: am Mittwoch, dem 5.7.2006, in der Übung.