Prof. Dr. F. Schulz
M. Eckart

WS 2005/2006
Übungsblatt 2

Übungsblatt zur Vorlesung Fourier-Analysis

1. Guenther & Lee: Problem 3-1.5., Seite 52

Zeige die Gültigkeit der in der Vorlesung verwendeten Orthogonalitätsrelationen:

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx &= \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n \neq m \\ L & \text{für} \quad n = m \end{cases} \\
\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx &= \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n \neq m \\ L & \text{für} \quad n = m \end{cases} \\
\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx &= 0 \qquad \forall m, n
\end{aligned}$$

wobei $m, n \in \mathbb{N}$.

2. Guenther & Lee: Problem 3-1.9./3-1.10., Seite 53

$f(x)$ sei auf dem Intervall $0 \leq x \leq L$ definiert.

Die Funktion $u(x)$ mit

$$u(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für} \quad 0 \leq x \leq L \\ -f(-x) & \text{für} \quad -L \leq x \leq 0 \end{cases}$$

heißt ungerade Erweiterung von $f(x)$ auf das Intervall $[-L, L]$.

Analog heißt $g(x)$ die gerade Erweiterung von $f(x)$ auf das Intervall $[-L, L]$, falls

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für} \quad 0 \leq x \leq L \\ f(-x) & \text{für} \quad -L \leq x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Zeige, daß sich die Fourier-Reihe von $u(x)$ auf die folgende Form reduziert:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad ; \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

Diese Reihe heißt auch Sinus-Reihe von $f(x)$ auf dem Intervall $[0, L]$.

(b) Zeige, daß sich die Fourier-Reihe von $g(x)$ auf die folgende Form reduziert:

$$g(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad ; \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

Diese Reihe heißt auch Cosinus-Reihe von $f(x)$ auf dem Intervall $[0, L]$.

3. Guenther & Lee: Problem 3-1.11., Seite 53

Sei $f(x) = x$ für $0 \leq x \leq \pi$.

Berechne die Cosinus- und Sinus-Reihe von $f(x)$ und begründe welche der beiden für numerische Zwecke sinnvoller ist.

Zeige, daß die Cosinus-Reihe an der Stelle $x = 0$ auf

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$$

und die Sinus-Reihe an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ auf

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ldots$$

führt.

4. Guenther & Lee: Problem 3-1.16., Seite 54

Zeige unter Verwendung von

$$e^{\pm inx} = \cos(nx) \pm i \sin(nx)$$

daß

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \ ,$$

wobei $b_0 = 0$ und

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad \Longrightarrow \quad c_{-n} = \overline{c}_n \ .$$

Zeige zudem, daß

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Hierbei soll angenommen werden, daß a_n und b_n die Fourier-Koeffizienten einer Funktion $f(x)$ sind, die in eine Fourier-Reihe entwickelt werden kann, wobei letztere gleichmäßig konvergieren soll.