Prof. Dr. F. Schulz
M. Eckart

Übungsblatt zur Vorlesung Fourier-Analysis

1. Guenther & Lee: Problem 3-2.3., Seite 61

Die Funktion $f(x)$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} (1-s)x & \text{für} \quad x \leq s \\ (1-x)s & \text{für} \quad s < x \end{cases}$$

wobei $0 \leq x \leq 1$ und s ein Parameter aus dem Intervall $[0,1]$ ist.

Zeige, daß man für die Sinus-Reihe von $f(x)$ (vgl. Übungsblatt 2) folgendes Ergebnis erhält:

$$\frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi s)\sin(n\pi x)}{n^2} .$$

Beantworte zudem die Fragen, ob diese Reihe gegen $f(x)$ konvergiert und ob die Reihe gleichmässig konvergiert. Wie lautet die Parsevalsche Beziehung für $s = \frac{1}{2}$ bzw. $s = \frac{1}{4}$?

2. Guenther & Lee: Problem 3-2.6., Seite 62

Die Fourier-Koeffizienten der Funktion f seinen durch a_n, b_n und die Fourier-Koeffizienten der Funktion g seinen durch c_n, d_n gegeben. Schreibe die Parsevalsche Beziehung für die Funktion $f+g$ aus und verwende die Beziehung für die Funktionen f und g separat.

Zeige damit, daß folgende Beziehung gilt:

$$\frac{1}{2}a_0c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_nc_n + b_nd_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx .$$

3. Guenther & Lee: Problem 3-2.14., Seite 63

Zeige unter Verwendung der Aufspaltung $\cos^{2n}(x) = \cos^{2n-1}(x)\cos(x)$ und partieller Integration, daß

$$I_{2n} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}\left(\frac{u}{2}\right) du = 2\pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$$

4. Guenther & Lee: Problem 3-2.15., Seite 63

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, daß $T(x)$ mit

$$T(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}\left(\frac{t-x}{2}\right) f(t)dt$$

ein trigonometrisches Polynom ist, das höchstens den Grad n besitzt.

(a) Zeige zunächst, daß

$$2\cos(kx)\cos(x) = \cos[(k+1)x] + \cos[(k-1)x] \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

und zeige dann durch vollständige Induktion, daß

$$\cos^n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \cos(kx)$$

mit $c_k \in \mathbb{R}$.

(b) Verwende das Ergebnis aus (a) und zeige damit, daß

$$\cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n} d_k \cos(kx)$$

mit $d_k \in \mathbb{R}$.

(c) Setze dieses Ergebnis nun in die Definition von $T(x)$ ein und schließe damit den Beweis ab, daß $T(x)$ ein trigonometrisches Polynom ist, das höchstens den Grad n besitzt.

Mit Hilfe der Ergebnisse aus den letzten beiden Aufgaben kann der Weierstraßsche Approximationssatz für trigonometrische Polynome direkt bewiesen werden (siehe Guenther & Lee, Seite 60/61). Sollten Fragen zu diesem Beweis auftreten, können diese in den Übungen besprochen werden.