Prof. Dr. F. Schulz
M. Eckart

Übungsblatt zur Vorlesung Fourier-Analysis

1. Guenther & Lee: Problem 3-3.2., Seite 72

Es soll angenommen werden, daß $f(x)$ folgende Bedingung erfüllt

$$|f(x+u) - f(x)| < L|u|^\alpha \ ,$$

wobei L und α beliebige Konstanten sind. Für $\alpha = 1$ ist $f(x)$ Lipschitz-stetig und für $0 < \alpha < 1$ ist $f(x)$ Hölder-stetig.

Zeige, daß die Fourier-Reihe für alle x gegen $f(x)$ konvergiert, falls f 2π-periodisch und Lipschitz- oder Hölder-stetig ist.

2. Guenther & Lee: Problem 3-3.3., Seite 72

Benutze die Formel für die geometrische Summe, um zu zeigen daß

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} e^{iku} = \frac{e^{i(n+1)u} - 1}{e^{iu} - 1} - \frac{1}{2} \ .$$

Zeige anschließend durch Aufspaltung in Real- und Imaginärteil, daß

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(ku) &= \frac{\sin((n+1/2)u)}{2\sin(u/2)} \\ \sum_{k=1}^{n} \sin(ku) &= \frac{\cos(u/2) - \cos((n+1/2)u)}{2\sin(u/2)} \ . \end{aligned}$$

3. Riemann-Lebesgue-Lemma

Unter denselben Annahmen, die in der Vorlesung gemacht wurden, kann das Riemann-Lebesgue-Lemma auch auf uneigentliche Integrale erweitert werden, wo die Integrationsgrenzen durch $\pm\infty$ gegeben sind. Wir betrachten daher das Integral

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)dx$$

für welches das Riemann-Lebesgue-Lemma aussagt, daß $\lim_{\alpha\to\infty} I(\alpha) = 0$, falls $f(x)$ absolut integrabel ist.

(a) Zeige unter Verwendung von partieller Integration, daß $I(\alpha)$ schneller als jede Potenz von α gegen Null geht, wenn man annimmt, daß alle Ableitungen von $f(x)$ absolut integrabel sind.

(b) Berechne $I(\alpha)$ explizit für $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ durch Herleitung einer Differentialgleichung erster Ordnung, welcher das Integral gehorcht.