Prof. Dr. F. Schulz
M. Eckart

Übungsblatt zur Vorlesung Fourier-Analysis

1. Guenther & Lee: Problem 3-2.2., Seite 61

Sei $f(x) = x^2$ für $0 \leq x \leq \pi$. Wie lautet die Parsevalsche Beziehung für die gerade bzw. ungerade 2π-periodische Erweiterung von $f(x)$?

2. Guenther & Lee: Problem 3-3.4., Seite 72

In der Vorlesung wurde für stetige, 2π-periodische und stückweise glatte Funktionen gezeigt, daß

$$a_n = -\frac{\beta_n}{n} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{\alpha_n}{n} \ ,$$

wobei a_n, b_n die Fourier-Koeffizienten von f und α_n, β_n die Fourier-Koeffizienten von f' sind.

(a) Zeige, daß es eine Konstante M gibt, so daß

$$|a_n| \leq \frac{1}{n} M \quad \text{und} \quad |b_n| \leq \frac{1}{n} M \ ,$$

d.h.

$$|a_n| = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{und} \quad |b_n| = O\left(\frac{1}{n}\right) \ .$$

(b) Sei nun f 2π-periodisch, $f^{(r-1)}$ stetig und $f^{(r)}$ stückweise stetig für ein $r \geq 1$. Zeige, daß dann gilt

$$|a_n| = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad \text{und} \quad |b_n| = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \ .$$

(c) Verwende dieses Ergebnis, um zu zeigen, daß die Fourier-Reihe von f für alle x in $[-\pi, \pi]$ gegen $f(x)$ konvergiert, falls f 2π-periodisch und f'' auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ stetig ist.

3. Weierstraßscher Approximationssatz

Auf dem 3. Übungsblatt wurden bereits die wichtigsten Schritte nachvollzogen, die zu einem direkten Beweis des Weierstraßschen Approximationssatzes für trigonometrische Polynome führen, d.h.

Sei $\varepsilon > 0$ und $f(x)$ eine stetige, 2π-periodische Funktion, dann gibt es ein trig. Polynom $T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$, so daß $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$ für alle x.

Im folgenden soll dieser Approximationssatz nun alternativ bewiesen werden, indem die Gültigkeit des Weierstraßschen Approximationssatzes für Polynome vorausgesetzt wird, d.h.

Sei $\varepsilon > 0$ und $f(x)$ stetig auf dem Intervall $[a, b]$, dann gibt es ein Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, so daß $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$.

(a) Wende den Approximationssatz für Polynome zunächst auf $g(x) = f(\arccos(x))$ an und erhalte so eine Approximation für gerade, stetige, 2π-periodische Funktionen.

(b) Wende dieses Ergebnis auf die Funktionen $f(x)+f(-x)$ sowie $(f(x)-f(-x))\cdot\sin(x)$ an, um eine Approximation für $f(x)\sin^2(x)$ zu erhalten, wobei $f(x)$ stetig und 2π-periodisch ist.

(c) Nutze die Periodizität von $f(x)$ aus, um auch eine Approximation für $f(x)\cos^2(x)$ zu bekommen und schließe den Beweis ab.