Prof. Dr. F. Schulz
M. Eckart



# Übungsblatt zur Vorlesung Fourier-Analysis

**1. Guenther & Lee: Problem 3-4.1., Seite 80**

Sei $f(x) = 0$ für $x < 0$, und $f(x) = e^{-x}$ für $x > 0$. Zudem sei $f(0) = \frac{1}{2}$.
Zeige, daß

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(vx) + v\sin(vx)}{1+v^2} dv$$

durch Berechnung des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos(v(u-x))du$$

und anschließende Verwendung des Fourier-Integral-Theorems.

**2. Guenther & Lee: Problem 3-4.2., Seite 80**

Wir nehmen an, daß

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos(v(u-x))du \right) dv \ .$$

Zeige damit, daß

$$f(x) = \int_0^\infty \left(A(v)\cos(vx) + B(v)\sin(vx)\right) dv \ ,$$

wobei

$$\begin{aligned} A(v) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos(vu)du \\ B(v) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin(vu)du \ . \end{aligned}$$

**3. Guenther & Lee: Problem 3-4.3., Seite 81**

Sei $f(x)$ eine stetige, stückweise glatte und absolut integrable Funktion.

(a) Zeige für gerade Funktionen $f(x)$, daß

$$f(x) = \int_0^\infty A(v)\cos(vx)dv \; ,$$

wobei

$$A(v) \quad = \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(u)\cos(vu)du \; .$$

(b) Zeige für ungerade Funktionen $f(x)$, daß

$$f(x) = \int_0^\infty B(v)\sin(vx)dv \; ,$$

wobei

$$B(v) \quad = \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(u)\sin(vu)du \; .$$

(c) Was ändert sich an diesen Aussagen, wenn $f(x)$ nur stückweise glatt und absolut integrabel ist?

**4. Guenther & Lee: Problem 3-4.4., Seite 81**

Die Funktion $f(x)$ sei für $x \geq 0$ definiert. Die Cosinus- bzw. Sinus-Transformation von $f$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} C(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos(kx)dx \\ S(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin(kx)dx \; , \end{aligned}$$

falls diese uneigentlichen Integrale existieren. Verwende die partielle Integration, um zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} C(f') &= -\frac{2}{\pi}f(0) + kS(f) \\ S(f') &= -kC(f) \end{aligned}$$

falls $f$ und $f'$ stetig sowie absolut integrabel sind und $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$.