Prof. Dr. F. Schulz
M. Eckart

Übungsblatt zur Vorlesung Fourier-Analysis

1. Eigenschaften der Fourier-Transformation

Für die folgenden Teilaufgaben soll angenommen werden, daß die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ zweimal stetig differenzierbar und die Funktionen selbst, sowie deren Ableitungen, absolut integrabel sind.

(a) Zeige, daß die Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega)$ gerade ist, falls $f(x)$ gerade ist.

(b) Zeige, daß die Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega)$ gerade und reell ist, falls $f(x)$ gerade und reell ist.

(c) Die Faltung $f * g$ der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sei definiert als

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \; .$$

Zeige, daß die Faltung kommutativ ist, d.h. $f * g = g * f$ und zudem gilt, daß $\widehat{(f * g)}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$.

2. Anwendung der Fourier-Transformation

(a) Berechne die Fourier-Transformierte von $f(x) = e^{-a|x|}$.

(b) Berechne die Fourier-Transformierte von $f(x) = e^{-ax^2}$.

(c) Berechne die Fourier-Transformierte von $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

(d) Bestimme die Funktion f, so daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-|y|}dy = \frac{4}{3}e^{-|x|} - \frac{2}{3}e^{-2|x|} \; .$$

(e) Bestimme die Funktion f, so daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-\frac{y^2}{2}}dy = e^{-\frac{x^2}{4}} \; .$$

(f) Die Fourier-Transformierte von f sei gegeben durch $\hat{f}(\omega) = \frac{1+i\omega}{1+\omega^6}$. Berechne $f'(0)$ ohne $f(x)$ explizit auszurechnen.