Prof. Dr. F. Schulz
M. Eckart

Übungsblatt zur Vorlesung Fourier-Analysis

1. Guenther & Lee: Problem 3-4.7., Seite 82

Die Funktion f sei stetig, absolut integrabel und gehe von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$. Zudem gilt $f(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$. Zeige im Rahmen von mehrdimensionalen Fourier-Transformationen, daß

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}} = (-i\omega_j)\hat{f} \; .$$

2. Guenther & Lee: Problem 3-4.8., Seite 82

Für diese Aufgabe sollen die Vorfaktoren bei der Fourier-Transformation und ihrer Inversen symmetrisch verteilt werden, also

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\omega\cdot x} f(x) dx \\ f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega\cdot x} \hat{f}(\omega) d\omega \; , \end{aligned}$$

wobei $dx = dx_1 \cdots dx_n$, $d\omega = d\omega_1 \cdots d\omega_n$ und $\omega \cdot x = x_1\omega_1 + \ldots + x_n\omega_n$.
Zudem sei im folgenden $f(x_1, x_2)$ eine radialsymmetrische Funktion, d.h. $f(x_1, x_2) = f(r)$ mit $r = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}$. Führe Polarkoordinaten ein, d.h.

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos(\phi) \quad ; \quad x_2 = r\sin(\phi) \\ \omega_1 &= \rho\cos(\alpha) \quad ; \quad \omega_2 = \rho\sin(\alpha) \end{aligned}$$

und zeige damit, daß

$$\hat{f} = \hat{f}(\omega_1, \omega_2) = \hat{f}(\rho) = \int\limits_0^\infty f(r) r \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos(\rho r \cos(\phi)) d\phi \right) dr \; .$$

Die Bessel-Funktion erster Art und Ordnung 0 ist gegeben durch

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos(z\cos(\phi)) d\phi \quad \Longrightarrow \quad \hat{f}(\rho) = \int\limits_0^\infty J_0(\rho r) f(r) r dr \; .$$

Verwende die inverse Fourier-Transformation um zu zeigen, daß

$$f(r) = \int\limits_0^\infty J_0(r\rho) \hat{f}(\rho) \rho d\rho \; .$$

In diesem Zusammenhang wird $\hat{f}(\rho)$ auch als Hankel-Transformierte von $f(r)$ bezeichnet.