Prof. Dr. F. Schulz
M. Eckart

WS 2005/2006
Übungsblatt 10

Übungsblatt zur Vorlesung Fourier-Analysis

1. Guenther & Lee: Problem 4-2.11., Seite 101

Finde mit Hilfe der Separation der Variablen die formale Lösung der Differentialgleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad ; \quad 0 < x < L \ , \ t > 0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{array}{rcl} u(x,0) & = & f(x) \\ u_t(x,0) & = & 0 \end{array} \quad ; \quad 0 \leq x \leq L$$

und den Randbedingungen

$$u(0,t) \ = \ u(L,t) + u_x(L,t) \ = \ 0 \quad ; \quad t \geq 0 \ .$$

(a) Zeige daß der Separationsansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ auf die Differentialgleichung

$$X''(x) - KX(x) = 0$$

führt, die unter den Randbedingungen $X(0) = 0$ und $X(L) + X'(L) = 0$ gelöst werden muß.

(b) Begründe, daß $K = -\lambda^2$ sein muß, wobei $\lambda > 0$ ist.

(c) Zeige, daß λ die Gleichung

$$\tan(\lambda L) = -\lambda$$

erfüllen muß, um eine nichttriviale Eigenfunktion $X(x)$ zu erhalten.

(d) Skizziere die Graphen der Funktionen

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & \tan(z) \\ y_2 & = & -\dfrac{z}{L} \end{array}$$

in einem gemeinsamen Koordinatensystem und bestätige damit die Aussage, daß es unendlich viele Werte $z_n > 0$ gibt, für die $\tan(z) = \frac{z}{L}$. Hierbei ist $z = \lambda L$ und die Eigenwerte ergeben sich daher zu

$$-\lambda_n^2 = -\left(\frac{z_n}{L}\right)^2$$

(e) Approximiere $z_1, \ldots, z_4$ für $L = 11$ auf 4 Dezimalstellen genau und verwende dazu die Newton-Methode mit dem Startwert $n\pi$ für z_n.

(f) Zeige, daß für große n die Approximation $z_n \approx n\pi - \frac{\pi}{2}$ gültig ist.