Prof. Dr. F. Schulz
M. Eckart

Übungsblatt zur Vorlesung Fourier-Analysis

1. Guenther & Lee: Problem 4-4.10., Seite 107

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin(\lambda_n x) \\
u_n(t) &= \frac{1}{c\lambda_n}\int_0^t F_n(\tau)\sin(c\lambda_n(t-\tau))d\tau \\
F_n(t) &= \frac{2}{L}\int_0^L F(x,t)\sin(\lambda_n x)dx
\end{aligned}
$$

mit $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$ eine Lösung des Anfangs- und Randwertproblems

$$
\begin{cases}
u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t) & 0 < x < L \quad t > 0 \\
u(x,0) = u_t(x,0) = 0 & 0 \le x \le L \\
u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \ge 0
\end{cases}
$$

darstellt, sofern $F(x,t) \in C^3\{[0,L] \times [0,\infty)\}$ und

$$F(0,t) = F(L,t) = F_{xx}(0,t) = F_{xx}(L,t) = 0$$

für alle $t \ge 0$. Dazu sollen ein beliebiges $T > 0$ konstant gewählt werden und die Variablen x und t auf $[0,L]$ bzw. $[0,T]$ beschränkt sein.

(a) Berechne u_x, u_{xx}, u_t und u_{tt} unter der Voraussetzung, daß Differentiation und Summation vertauscht werden dürfen.

(b) Beweise die Gültigkeit der nachstehenden Ungleichungen mit $\|F_n\| = \max\limits_{0\le t\le T} |F_n(t)|$:

$$|\lambda_n^2 u_n(t)| \le T\lambda_n \frac{\|F_n\|}{c} \quad , \quad |u_n'(t)| \le T\|F_n\| \quad , \quad |u_n''(t)| \le |F_n(t)| + cT\lambda_n\|F_n\| \; .$$

(c) Mit $F(0,t) = F(L,t) = F_{xx}(0,t) = F_{xx}(L,t) = 0$ soll gezeigt werden, daß

$$|F_n(t)| \le \frac{2}{L\lambda_n^3}\int_0^L |F_{xxx}(x,t)|dx \; .$$

(d) Verwende die Ergebnisse aus b) und c), um die gliedweise Differentiation in a), sowie die Reihenentwicklung $F(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n(t)\sin(\lambda_n x)$ für $0 \le x \le L$ und $0 \le t \le T$ zu rechtfertigen.