Abteilung: Angewandte Analysis
Prof. Dr. Werner Balser
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis I - Blatt 10
Abgabe: 5. Juli, 14:15 Uhr vor der Übung

Name: **Vorname:** **Tutor:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	2	4	4	4	6	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Zeige, dass die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar sind und die Gleichungen

   (a) $\dfrac{d}{dz}e^z = e^z$, (b) $\dfrac{d}{dz}\cos z = -\sin z$, (c) $\dfrac{d}{dz}\sin z = \cos z$.

   gelten.

2. Untersuche die folgenden Funktionen auf ihrem natürlichen Definitionsbereich auf Differenzierbarkeit und bestimme gegebenenfalls deren Ableitungen

   (a) $f_1(x) = x^n$, (b) $f_2(x) = \sin^n(x)$, (c) $f_3(x) = x^x$, (d) $f_4(x) = x^n e^{\cos x}$.

   Hierbei sind immer $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ Konstanten.

3. Zeige die folgenden Aussagen, hierbei ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall in $\mathbb{R}$.

   (a) Wenn die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ in I einer Lipschitzbedingung genügt. Dann ist f gleichmäßig stetig in I.

   (b) Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Wenn die erste Ableitung beschränkt ist, d.h. es gilt
   $$\sup_{x \in I} |f'(x)| < \infty.$$
   Dann genügt f einer Lipschitzbedingung.

   (c) In der Situation von Teilaufgabe (b) sei L eine Lipschitzkonstante für f auf I. Dann ist die Ungleichung
   $$L \geq \sup_{x \in I} |f'(x)|$$
   richtig.

Bitte wenden!

4. (a) Zeige die folgende Aussage: Ist eine Funktion in einem $x_0 \in \mathbb{R}$ rechts- bzw, linksseitig differenzierbar, so ist sie dort genau dann differenzierbar, wenn die rechts- und linksseitige Ableitung übereinstimmen. Gib weiter ein Beispiel einer Funktion an, die in einem $x_0 \in \mathbb{R}$ rechts- und linksseitig differenzierbar ist, ohne dort differenzierbar zu sein.

   (b) Benutze den Mittelwertsatz 7.2.2, um Abschätzungen für $\cos\left(2 + \frac{1}{n}\right)$ mit $n \in \mathbb{N}$ herzuleiten, wenn der Wert $\cos 2$, z.B. aus einer Wertetabelle, bekannt sei. Gib weiter eine geometrische Interpretation des Mittelwertsatzes.

5. Betrachte wiederum die Funktionen f_k und g von Übungsblatt 7, Aufgabe 5. Zeige die folgenden Aussagen

   (a) Für alle $a \in \mathbb{R}$ und $h_n = 2 \cdot 4^{-n-1}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$|f_n(a + h_n) - f_n(a)| = |h_n| \quad \text{oder} \quad |f_n(a - h_n) - f_n(a)| = |h_n|$$

   (b) Mit den Setzungen aus Teilaufgabe (a) gilt dann

$$|f_m(a + h_n) - f_m(a)| = |h_n| \quad \text{oder} \quad |f_m(a - h_n) - f_m(a)| = |h_n|$$

   für alle $m \leq n$.

   (c) Mit den Setzungen aus Teilaufgabe (a) gilt

$$|f_m(a + h_n) - f_m(a)| = 0$$

   für alle $m > n$.

   (d) Finde eine Nullfolge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für die

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(a + d_n) - g(a)}{d_n}$$

   nicht existiert.

   (e) Ist die gemäß Übungsblatt 9 Aufgabe 4c auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion g in irgendeinem Punkt $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar?