Abteilung: Angewandte Analysis
Prof. Dr. Werner Balser
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis I - Blatt 11

Abgabe: 12. Juli, 14:15 Uhr vor der Übung

Name: **Vorname:** **Tutor:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	3	5	4	4	4	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Beweise die folgenden Aussage: Es sei φ differenzierbar auf $[a, b]$ und es gelte $\varphi'(x) \neq 1$, $\forall x \in [a, b]$. Dann hat die Funktion φ im Intervall $[a, b]$ höchstens einen Fixpunkt, d.h. die Gleichung $x - \varphi(x) = 0$ hat höchstens eine Lösung. Gib mehrere hinreichende Bedingungen für die Existenz eines Fixpunktes an. (Beweis!)

2. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ *Stammfunktion* von f, falls $F' \equiv f$ gilt. Bearbeite die folgenden Aufgaben:

   (a) Zeige, dass eine Stammfunktion bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist.

   (b) Bestimme alle Stammfunktionen von $f(x) = c(x - x_0)^k$ für $k \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$.

   (c) Zeige die Aussage: Es sei f eine Funktion mit

   $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \qquad \text{für alle} \qquad |x - x_0| < R.$$

   Dann ist die Reihe

   $$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k} (x - x_0)^k \qquad \text{für alle} \qquad |x - x_0| < R.$$

   ebenfalls für alle $|x - x_0| < R$ konvergent, und ist eine Stammfunktion von f.

   (d) Finde eine Potenzreihenentwicklung für $\log(1 + x) - 1$ um $x_0 = 0$ und bestimme deren Konvergenzradius.

Bitte wenden!

3. Zeige die folgenden Verallgemeinerungen zur Produktregel:

   (a) Es seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $f_1, \dots, f_n$ in einem Punkt x_0 differenzierbar. Dann ist $f = \prod_{k=1}^n f_k$ differenzierbar in x_0 und es gilt

$$f'(x_0) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x_0) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} f_j(x_0).$$

   (b) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und f, g n-mal differenzierbar in einem Punkt x_0. Dann ist fg ebenfalls n-mal in x_0 differenzierbar und es gilt

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x_0) g(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \left(\frac{d^k}{dx^k} f(x_0) \right) \left(\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} g(x_0) \right)$$

4. Zeige die Existenz von differenzierbaren Umkehrfunktionen f_i^{-1} der f_i auf dem angegebenen Definitionsbereich für $i = 1, 2, 3, 4$ und bestimme die Ableitungen der f_i^{-1}. Vereinfache die entstehenden Gleichungen weitestgehend.

   (a) $f_1(x) = \sinh(x)$, $x \in \mathbb{R}$,
   (b) $f_2(x) = \cosh(x)$, $x > 0$,
   (c) $f_3(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$,
   (d) $f_4(x) = x^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $x > 0$.

5. Es sei f differenzierbar in x_0 und $f(x_0) \neq 0$. Dann bezeichnen wir mit $Df(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$ die *logarithmische Ableitung* in x_0. Zeige die folgenden Aussagen:

   (a) Es seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $f_1, \dots, f_n$ differenzierbar in x_0 mit $f_k(x_0) \neq 0$ für $k = 1, \dots, n$. Dann gilt

$$D \prod_{k=1}^{n} f_k(x_0) = \sum_{k=1}^{n} D f_k(x_0).$$

   (b) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f > 0$ in x_0 differenzierbar. Dann gilt:

$$f^{-\alpha}(x_0) \frac{d}{dx} f^\alpha(x_0) = \alpha D f(x_0).$$

   (c) Es sei G eine Stammfunktion von g. Dann hat das Anfangswertproblem

$$Df(x) = g(x), \qquad f(x_0) = f_0 \neq 0$$

   genau eine Lösung f, die gegeben ist durch

$$f(x) = f_0 \exp\left(G(x) - G(x_0)\right).$$

   (d) Es seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$. Bestimme alle Lösungen f des Anfangswertproblems

$$Df(x) = \lambda k x^{k-1}, \qquad f(0) = f_0 \neq 0.$$