Abteilung: Angewandte Analysis
Prof. Dr. Werner Balser
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis I - Blatt 12

Abgabe: 19. Juli, 14:15 Uhr vor der Übung

Name: **Vorname:** **Tutor:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	3	6	3	3	5	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Prüfe, ob die folgenden Grenzwerte existieren und bestimme sie gegebenenfalls:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\log x}{\cot x}$, (b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\cot x}$, (c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+4x^2+3x-8}{3x^4+4x^3-30x^2+36x-13}$.

2. Ermittle mittels partieller Integration oder Substitution folgende unbestimmte Integrale.

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}}$, (b) $\displaystyle\int x e^{x^2}\,dx$, (c) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx$,
   (d) $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx$, (e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x}$, (f) $\displaystyle\int \tan x\,dx$.

3. Es seien $n, m \in \mathbb{N}$. Zeige die folgenden Identitäten

   (a) $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \delta_{mn}$,

   (b) $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \delta_{mn}$,

   (c) $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nx)\sin(mx)\,dx = 0$.

   Hierbei ist $\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad n = m \\ 0 & \text{falls} \quad n \neq m \end{cases}$ das Kroneckersymbol. Hinweis: Verwende die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen.

Bitte wenden!

4. Beweise die folgenden Aussagen:

   (a) Besitzt die integrierbare Funktion f eine Stammfunktion in $[a, b]$, so existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit der Eigenschaft

   $$\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)(b - a)$$

   (b) Die Aussage in Teilaufgabe (a) ist falsch, wenn f nur noch als integrierbar vorausgesetzt wird.

   (c) Bestimme $\xi \in [0, 1]$ mit

   $$\int_0^1 x^n\, dx = \xi^n,$$

   hierbei ist $n \in \mathbb{N}$.

5. Beweise die folgenden Aussagen mit $a < b$:

   (a) Es sei f stetig auf $[a, b]$ und es gelte $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Wenn $\int_a^b f(x)\, dx = 0$ gilt, dann folgt $f \equiv 0$.

   (b) Wir nennen eine Funktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine *Treppenfunktion*, wenn es eine Zerlegung von $[a, b]$ in endlich viele nicht-triviale Intervalle gibt und φ auf diesen Intervallen konstant ist. Wenn φ eine Treppenfunktion ist, dann ist φ integrierbar. Bestimme weiter

   $$\int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

   (c) Die Funktion f, welche auf $[a, b]$ definiert ist durch

   $$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},$$

   ist nicht integrierbar auf $[a, b]$.

   (d) Die Funktion f sei stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b) und es gelte

   $$f(a) < 0, \qquad f(b) < 0, \qquad \int_a^b f(x)\, dx > 0.$$

   Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.