Abteilung: Angewandte Analysis
Prof. Dr. Werner Balser
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis I - Blatt 13

Abgabe: 26. Juli, 14:15 Uhr vor der Übung

Name: **Vorname:** **Tutor:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	4	3	5	4	4	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Führe für die folgenden Funktionen eine reelle Partialbruchzerlegung durch und bestimme eine Stammfunktion durch unbestimmte Integration

   (a) $\dfrac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x}$, (b) $\dfrac{x+1}{x(x-1)^3}$,

   (c) $\dfrac{3x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)(x - 1)}$, (d) $\dfrac{5x^2 - 4x + 16}{(x-3)(x^2 - x + 1)^2}$.

   Hinweis: Ohne Beweis darf die Formel
   $$\int \frac{dx}{((x-a)^2 + b^2)^k} = \frac{x-a}{2(k-1)b^2((x-a)^2 + b^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)b^2} \int \frac{dx}{((x-a)^2 + b^2)^{k-1}}$$
   für $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $b \neq 0$ verwendet werden.

2. Führe für die folgenden Funktionen eine komplexe Partialbruchzerlegung durch

   (a) $\dfrac{z^4 - i}{z(z^2 + 2z + 5)}$, (b) $\dfrac{1}{z^2 + 1}$, (c) $\dfrac{z - 1}{(z^2 + 4)^2}$.

3. Bearbeite die folgenden Aufgaben

   (a) Die Funktion f sei auf $\mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := 1 + \int_0^x \frac{1+\sin t}{2+t^2}\, dt$. Gibt es ein Polynom $p(x) = a + bx + cx^2$ mit
   $$p(0) = f(0), \qquad p'(0) = f'(0), \qquad p''(0) = f''(0)?$$
   Wenn das möglich ist, berechne die Koeffizienten a, b und c.

   (b) Bestimme alle Extremstellen der Funktion
   $$f(x) := \int_0^x (1 + 4t)e^{t^2}\, dt + xe^{x^2}$$
   auf $\mathbb{R}$.

   (c) Beweise die Aussage: Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt
   $$\int_0^x e^{x-t} t^n\, dt = n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Bitte wenden!

4. Beweise die folgenden Aussagen

   (a) Wenn eine Funktion f in $(-1, 1)$ beliebig oft differenzierbar ist, und es gilt $f^{(n)}(x) > 0$ für alle $x \in [0, 1)$ und alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert die Taylorreihe von f bezüglich $x_0 = 0$ für alle $x \in (-1, +1)$.

   (b) Wenn eine Funktion f in $[0, \infty)$ beliebig oft differenzierbar ist und es gelten $f(0) = 1$ sowie $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$ für alle $x \in [0, +\infty)$ und alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt für die Funktion

$$g(x) := \frac{1 - f(x)}{x}, \quad x \in (0, \infty)$$

   die Aussage $(-1)^n g^{(n)}(x) \geq 0$ für alle $x \in (0, \infty)$ und $n \in \mathbb{N}_0$. (Hinweis: Entwickle f in sein Taylorpolynom mit Restglied in differentieller Form um den Entwicklungspunkt x und stelle damit $f(0)$ dar!)

5. (a) Die Funktion f sei $(n-1)$-mal differenzierbar in (a, b), und in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ existiere $f^{(n)}(x_0)$. Ferner sei t_n das Taylorpolynom höchstens n-ten Grades von f bezüglich x_0. Zeige, dass dann

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - t_n(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

   richtig ist.

   (b) Es sei

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k (x - x_0)^k$$

   eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Zeige, dass f beliebig oft differenzierbar ist und in eine Taylorreihe um x_0 entwickelt werden kann. Außerdem gilt die Gleichung $n! f_n = f^{(n)}(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

   (c) Die Funktion f sei auf $\mathbb{R}$ folgendermaßen definiert

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{falls} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{falls} \quad x = 0 \end{cases} .$$

   Zeige, dass f auf $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist, und berechne $f^{(n)}(0)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.